

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS SUPERSÔNICOS TURBULENTOS

COM DISSIPACÃO VISCOSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

WANG SHIN MEN

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1991

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS SUPERSONICOS TURBULENTOS

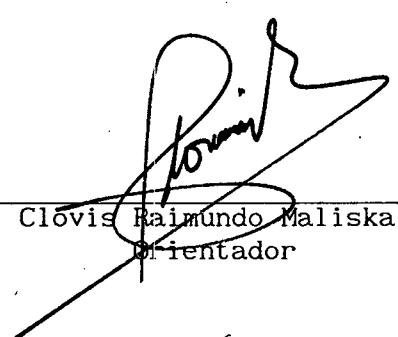
COM DISSIPACÃO VISCOSA

WANG SHIN MEN

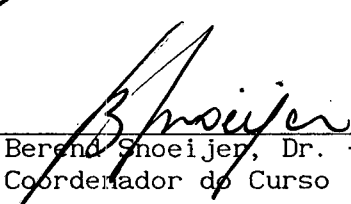
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

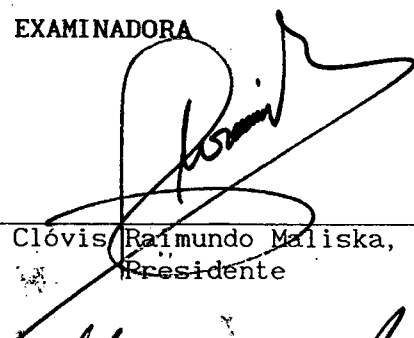


Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador



Prof. Bernd Snoeijer, Dr. - Ing.
Coordenador do Curso

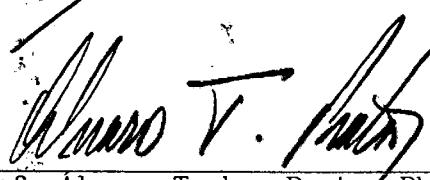
BANCA EXAMINADORA




Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



Prof. Hippolito V. Pereira F., Ph.D.



Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Antônio F. C. da Silva, Dr.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Clóvis Raimundo Maliska pela amizade e pela assistência que possibilitou o desenvolvimento desse trabalho.
- Ao professor Álvaro Toubes Prata pela sua boa vontade em ajudar sempre que foi necessário.
- Aos professores Hyppolito do Valle Pereira Filho, Arno Blass, Antônio Fábio Carvalho da Silva e Paulo César Phillipi pelo aprendizado.
- Ao grupo SINMEC pelo apoio.
- Aos colegas da pós-graduação pela boa convivência.
- À Verinha pelos serviços prestados.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE FIGURAS	iii
SIMBOLOGIA	vi
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 Preliminares	1
CAPÍTULO 2 - MODELO MATEMÁTICO	
2.1 Equações governantes	5
2.2 Transformação de coordenadas	14
2.3 Comportamento da viscosidade com a temperatura	16
2.4 Modelo de turbulência	17
CAPÍTULO 3 - MODELO NUMÉRICO	
3.1 Armazenamento das variáveis	19
3.2 Discretização das equações	21
3.3 Equação para a pressão	27
3.4 Aplicação das condições de contorno	33
3.4.1 Condição de contorno para velocidade e	

temperatura	34
3.4.2 Condição de contorno para a pressão e densidade	37
3.5 Aplicação do modelo de turbulência	38
3.5.1 Cálculo da vorticidade ($ \vec{\omega} $)	38
3.5.2 Cálculo da distância normal (y)	39
3.5.3 Cálculo da tensão cisalhante na parede	40
3.6 Interpolação dos coeficientes de transporte difusivos	42
3.7 Procedimento de solução	43
3.8 Critério de convergência	44
CAPÍTULO 4 - TESTES PRELIMINARES	
4.1 Placa plana - solução laminar incompressível	45
4.2 Placa plana isotérmica - solução laminar compressível	49
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS	
5.1 Placa plana turbulenta adiabática	55
5.2 Placa plana turbulenta isotérmica	62
5.3 Rampa adiabática turbulenta	67
5.4 VLS (Veículo Lançador de Satélites)	72
CONCLUSÕES	79
REFERÊNCIAS	83

RESUMO

A simulação de escoamentos supersônicos empregando as equações de Euler apresenta bons resultados quando o interesse é a determinação do coeficiente de pressão sobre a superfície, uma vez que as forças exercidas pelo escoamento sobre o corpo são, principalmente, devidas à forma do corpo e não à viscosidade do fluido.

Em casos onde se tem interesse em determinar o aquecimento cinético da superfície, é imperativo o uso das equações de Navier-Stokes. Nestes casos, a turbulência passa a ser importante pois altera significativamente os perfis de velocidade, modificando os gradientes de velocidade que atuam como termo fonte na equação da energia.

Com o objetivo, portanto, de simular escoamentos supersônicos viscosos para efeito de cálculo de aumento de temperatura da superfície do corpo, um modelo numérico para qualquer regime de velocidade é utilizado juntamente com o modelo de turbulência de Baldwin e Lomax.

Testes são realizados para escoamentos de alto e baixo número de Mach, laminar e turbulento, sobre placas planas e sobre rampas adiabáticas, sempre envolvendo efeitos da dissipação viscosa e efeito da temperatura sobre a viscosidade molecular. Sempre que possível, os resultados deste trabalho são comparados com outros resultados numéricos e experimentais.

Para finalizar, o escoamento sobre o VLS (Veículo Lançador de Satélites brasileiro) é simulado considerando também os efeitos de dissipação viscosa e turbulência.

ABSTRACT

In supersonic aerodynamic calculations, the use of the Euler equations suffices when the main goal is the determination of the pressure coefficient over the surface of the body. The reason is because the forces exerted by the fluid over the body are mainly due to the shape of the body rather than due to viscosity of the fluid.

When one is interested in determining the surface temperature increase due to frictional heating, the Navier-Stokes equations must be employed. In these cases, the turbulence effects need to be taken into consideration due to their influences on the velocity gradients.

With the main goal of simulating viscous fluid flows considering turbulence effects and viscous dissipation, the present work presents a numerical model, for solving all speed flow problems using the Baldwin e Lomax model of turbulence.

Results are presented for several fluid flow problems encompassing laminar, turbulent, low and high Mach number flows over flat plates and over adiabatic ramps. Whenever it is possible, results are compared with available numerical and experimental ones.

Finally, the viscous flow over the VLS (brasilian Satellites Launcher Vehicle) is simulated considering the effects of heat dissipation and turbulence.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 3.1.1	Disposição desencontrada das variáveis na malha	20
Fig. 3.1.2	Disposição co-localizada das variáveis na malha	21
Fig. 3.2.1	Volume de controle genérico para integração	22
Fig. 3.3.1	Posição das velocidades nos volumes de controle	30
Fig. 3.4.1	Condição de contorno prescrita na entrada	35
Fig. 3.4.2	Condição de contorno prescrita no contorno	36
Fig. 3.4.3	Condição de simetria, de saída parabólica e derivada nula	36
Fig. 3.4.4	Condição de contorno para pressão e densidade	37
Fig. 3.5.1	Distância normal (y)	39
Fig. 3.5.2	Velocidade tangencial para parede com inclinação positiva	40
Fig. 3.5.3	Velocidade tangencial para parede com inclinação negativa	41
Fig. 3.6.1	Interpolação na direção ξ . Localização dos coeficientes difusivos	42
Fig. 4.1.1	Vista parcial da malha	46
Fig. 4.1.2	Domínio computacional com as condições de contorno	47
Fig. 4.1.3	Escoamento laminar sobre placa plana. Perfil de velocidade	47
Fig. 4.1.4	Escoamento laminar incompressível sobre placa plana. Coeficiente de atrito	48
Fig. 4.2.1	Vista parcial da malha	50
Fig. 4.2.2	Domínio computacional com as condições de contorno	50
Fig. 4.2.3	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 2$	51

Fig. 4.2.4	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 2$	51
Fig. 4.2.5	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 3$	52
Fig. 4.2.6	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 3$	52
Fig. 4.2.7	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 4$	53
Fig. 4.2.8	Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 4$	53
Fig. 5.1.1	Malha usada nos resultados apresentados	58
Fig. 5.1.2	Malha testada, que obteve convergência, com os volumes da região de entrada maiores	58
Fig. 5.1.3	Domínio computacional com as condições de contorno	59
Fig. 5.1.4	Escoamento supersônico turbulento sobre placa plana. Coeficiente de atrito. $Ma = 1,5$	60
Fig. 5.1.5	Escoamento supersônico turbulento sobre placa plana. Coeficiente de atrito. $Ma = 2,85$	61
Fig. 5.1.6	Comportamento da viscosidade turbulenta para escoamento sobre placa plana. $Ma = 2,85$	62
Fig. 5.2.1	Malha usada nos resultados apresentados	63
Fig. 5.2.2	Domínio computacional com as condições de contorno	64
Fig. 5.2.3	Escoamento supersônico turbulento sobre a placa plana isotérmica. Perfil de velocidade para a posição $x = 182\text{mm}$	64
Fig. 5.2.4	Escoamento supersônico turbulento sobre a placa plana isotérmica. Perfil de velocidade para a posição $x = 281\text{mm}$	65
Fig. 5.2.5	Escoamento supersônico turbulento sobre a placa plana isotérmica. Perfil de velocidade de fricção ($x / L = 0,5$)	66
Fig. 5.3.1	Malha utilizada nos resultados apresentados	68
Fig. 5.3.2	Domínio computacional com as condições de contorno	68
Fig. 5.3.3	Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 16° . Coeficiente de atrito. $Ma = 2,9$	69
Fig. 5.3.4	Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 16° . Pressão na parede. $Ma = 2,9$	70
Fig. 5.3.5	Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 20° . Coeficiente de atrito. $Ma = 2,9$	69

Fig. 5.3.6	Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 20° Pressão na parede. $Ma = 2,9$ 70
Fig. 5.4.1	Malha utilizada nos resultados apresentados 73
Fig. 5.4.2	Domínio computacional com as condições de contorno 73
Fig. 5.4.3	Escoamento supersônico turbulento sobre VLS. Coeficiente de pressão. $Ma = 3,75$ 74
Fig. 5.4.4	Escoamento supersônico turbulento sobre VLS. Distribuição de temperatura na superfície. $Ma = 3,75$ 75
Fig. 5.4.5	Escoamento supersônico sobre VLS. Distribuição de temperatura na superfície para diversas soluções. $Ma = 3,75$ 76
Fig. 5.4.6	Escoamento supersônico turbulento sobre VLS. Coeficiente de atrito. $Ma = 3,75$ 77
Fig. 5.4.7	Escoamento supersônico turbulento sobre VLS. Coeficiente de atrito para os casos com e sem o modelo de turbulência 78

SIMBOLOGIA

- a^Φ - coeficiente para o termo Φ
- b^Φ - termo fonte para o termo Φ
- C_p - calor específico a pressão constante
- C_p^* - coeficiente de pressão, $2(p - p_\infty)/\rho_\infty u_\infty^2$
- C_f - coeficiente de atrito, $2\tau_w/\rho_\infty u_\infty^2$
- C^p - coeficiente obtido da linearização da equação de estado
- d_i^u - coeficiente para a equação de correção das velocidades relativo ao acoplamento pressão-velocidade ($i = e, w, n, s$).
- D_i - termo definido na obtenção das equações em coordenadas generalizadas que representa a difusão da propriedade em consideração ($i = 1$ a 4)
- n, s - indicadores das faces do volume de controle
- J - jacobiano da transformação de coordenadas
- K - coeficiente de condutibilidade térmica
- L - comprimento
- $\Delta []$ - aproximação em diferenças finitas para o termo entre parênteses
- m_i^ρ - coeficiente para o termo da densidade na equação relativa à pressão ($i = e, w, n, s$)

m_i^u - coeficiente para o termo da velocidade na equação relativa à pressão ($i = e, w, n, s$)

\dot{M} - fluxo de massa

Ma - número de Mach

\vec{n} - vetor unitário normal a uma superfície

p - pressão

P, E, N, S,

W, NE, SE,

NW, SW - referem-se aos pontos onde as variáveis são calculadas

Pe - número de Peclet

Pr - número de Prandtl

R_{ar} - constante dos gases perfeitos

RE_L - número de Reynolds baseado no comprimento L , $\rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$

Re_x - número de Reynolds baseado na dimensão da variável x , $\rho_\infty u_\infty x / \mu_\infty$

Re_{δ_0} - número de Reynolds baseado na espessura da camada limite na entrada da rampa adiabática, $\rho_\infty u_\infty \delta_0 / \mu_\infty$

Re_θ - número de Reynolds baseado na espessura da quantidade de movimento, $\rho_\infty u_\infty \theta / \mu_\infty$

S^Φ - termo fonte para a equação de conservação para a variável Φ

t - tempo

T - temperatura

u, v - componentes cartesianas do vetor velocidade

v_i - velocidade avaliada na face do volume de controle ($i = e, w, n, s$)

U, V - componentes contravariantes do vetor velocidade

U_{som} - velocidade do som

\vec{V} - vetor velocidade

x, y - sistema de coordenadas cartesiano

r, z - sistema de coordenadas cilíndrico

x_1, x_2 - sistema de coordenada ortogonal (cartesiano ou cilíndrico)

y^+ - coordenada da lei da parede, $\sqrt{\rho_w \tau_w} y / \mu_w$

y_*^+ - valor de y^+ computacional mais próximo da parede

SÍMBOLOS ESPECIAIS

α, β, γ - componentes do tensor métrico

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - coeficientes utilizados na aproximação WUDS

δ_0 - espessura da camada limite

$\bar{\gamma}$ - razão entre os calores específicos

\rightarrow

$\nabla \cdot \Phi$ - divergente da variável Φ

Φ - variável qualquer

Γ^Φ - coeficiente de transporte difusivo para variável Φ

μ - viscosidade dinâmica

μ_t - viscosidade turbulenta

μ_e - viscosidade efetiva

$\int_{v,t}$ - integral no volume e no tempo

ρ - massa específica

θ - espessura de quantidade de movimento $\int_0^\infty u/u_\infty (1 - u/u_\infty) dy$

\sum_{nb} - somatório dos elementos vizinhos a determinado volume de controle

ξ, η - sistema de coordenadas generalizado

$x_{1\xi}$ - derivada primeira de x_1 em relação a ξ

$\frac{\partial()}{\partial()}$ - derivada parcial

$\frac{D()}{Dt}$ - derivada material

Δt - avanço no tempo entre duas iterações

ΔV - elemento de volume

$()^*$ - valor da iteração anterior

$()^\circ$ - valor da variável no instante de tempo anterior

$()_{IN}$ - valor da propriedade na entrada ou da corrente livre

$()_w$ - valor da propriedade referente à parede

$()_\infty$ - valor da propriedade na corrente livre

$\overline{()}$ - valor médio num determinado período de tempo

$\tilde{()}$ - valor médio ponderada pela massa específica num determinado período de tempo

$()'$ - flutuação turbulenta associado ao valor médio $\overline{()}$

$()''$ - flutuação turbulenta associado ao valor médio $\tilde{()}$

$()|_i$ - valores avaliados na face ($i = e, w, n, s$)

τ_w - tensão cisalhante na parede

1 - INTRODUÇÃO

1.1 PRELIMINARES

Um dos objetivos principais da simulação numérica é a substituição dos experimentos repetitivos em laboratório quando já são conhecidas as características fundamentais e o modelo matemático do fenômeno físico de interesse. Com isso, espera-se reduzir custos na obtenção de dados, uma vez que o laboratório seria acionado apenas para corroborar o modelo numérico e em situações fora do alcance do modelo matemático. As aplicações podem ser as mais diversas, como no projeto de aeronaves, na previsão de tempo, na avaliação dos efeitos da poluição da atmosfera, na determinação dos efeitos dos ventos sobre construções, etc. Alguns dos exemplos citados já são simulados em situações bastante próximas das reais, e num futuro não muito distante, os pesquisadores esperam projetar uma aeronave inteira otimizada e checar a sua durabilidade com o uso de modelos matemáticos. Uma síntese sobre as vantagens e desvantagens, e tendências da simulação numérica, principalmente na área da aerodinâmica, pode ser vista no artigo de Kutler [1]. Contudo, para se chegar a esse ponto, serão necessárias ainda muitas pesquisas, como por exemplo, a obtenção de um modelo geral de turbulência, metodologias numéricas mais abrangente e precisas, computadores mais robustos, etc. Muitos progressos, entretanto, já foram realizados nesse sentido.

Historicamente a aplicação de métodos numéricos a problemas de engenharia tem sido feita usando-se classes de métodos para determinadas

classes de problemas. Por exemplo, elementos finitos tem sua origem em aplicações na área estrutural, enquanto que diferenças finitas desenvolveu-se na área de mecânica dos fluidos. Dentro da classe dos métodos de diferenças finitas observa-se que duas sub-classes são bem distintas; uma delas, baseada em procedimentos de aproximação em bases matemáticas tem-se concentrado na solução de problemas compressíveis e a outra, baseada em fundamentos físicos, denominada atualmente de volumes finitos, tem-se concentrado na solução de problemas incompressíveis de transferência de calor. As duas metodologias denominadas diferenças finitas e volumes finitos, respectivamente, tem evoluído recentemente para o uso de sistema de coordenadas coincidente com a fronteira. As diferenças fundamentais entre as duas metodologias são quanto a observação dos princípios de conservação a nível de volumes elementares e a aplicabilidade do método de acordo com a velocidade do escoamento. O método de diferenças finitas, com ampla experiência na solução de problemas de alta velocidade, apresenta dificuldades de solução para escoamentos com baixo número de Mach. O método dos volumes finitos, por sua vez, em sua concepção inicial, não é adequado para resolver problemas com alto número de Mach. Baseado nas propostas de Patankar [2] e Harlow e Amsden [3], desenvolvimentos foram realizados com o objetivo de tratar escoamentos de qualquer velocidade empregando a mesma modelação numérica. Os trabalhos de Van Doormaal [4], Silva e Maliska [6] [7] [8] [9] [10], e Karki e Patankar [5] mostraram que este caminho é bastante promissor.

Um outro aspecto interessante no desenvolvimento dos métodos numéricos é quanto a disposição das variáveis na malha. Devido ao fato de ser mais simples e usar menos memória que a formulação usando variáveis desencontradas, a formulação usando variáveis co-localizadas vem ganhando destaque depois de ter ficado esquecida por um longo período. A disposição co-localizada das variáveis voltou a ser interessante depois de ter sido possível obter uma adequada avaliação das velocidades nas faces dos volumes de controle usando gradientes de pressão mais consistentes. Contribuições pioneiras nesse sentido para escoamentos incompressíveis podem ser vistos nos trabalhos de Rhie [11], Hsu [12] e Peric, Kessler e Scheuerer [13]. Seguindo essa linha de trabalho, essa disposição de variáveis foi desenvolvida para a metodologia para escoamentos a qualquer regime de velocidade, conforme os trabalhos de Marchi et al. [14] [15] e Bortoli [16].

Este último modelo numérico tem apresentado resultados muito bons.

Contudo poucos são os trabalhos desse modelo usando as equações de Navier-Stokes. Não é do conhecimento do autor, entretanto, trabalhos usando as equações de Navier-Stokes com modelo de turbulência para esse tipo de formulação. Portanto, uma sequência natural nessa linha de desenvolvimento dos modelos numéricos é a inclusão dos modelos de turbulência.

O motivo para a implementação do código computacional usando modelos de turbulência é muito forte, uma vez que a maioria dos escoamentos existentes são turbulentos. Além disso, esse comportamento físico é de grande importância na engenharia, principalmente na área de transferência de massa e de calor. No caso específico da aerodinâmica, a turbulência está intimamente associada aos escoamentos supersônicos, os quais são do interesse do presente trabalho.

Uma vez estabelecida a necessidade de incluir a turbulência no código computacional, faz-se necessário a escolha de um modelo de turbulência adequado. Apesar da turbulência ser alvo de muitas pesquisas, as quais têm gerado uma grande quantidade de informações empíricas, não se conseguiu criar um modelo geral de turbulência. Uma revisão sobre a turbulência, principalmente para escoamentos incompressíveis, pode ser vista em Hinze [47]. Uma discussão sobre a obtenção de um modelo geral de turbulência pode ser visto no artigo de Kutler [22], e discussões sobre as aplicações dos modelos de turbulência podem ser encontrados nos trabalhos de Rodi [40] e Nallasamy [41]. E, uma boa coletânea de dados experimentais, juntamente com resultados numéricos, para escoamentos de interesse na engenharia são apresentados no livro de Cebeci e Bradshaw [48]. Neste, são tratados problemas de escoamentos tanto incompressíveis quanto compressíveis.

Nos escoamentos supersônicos sobre superfícies do tipo foguete, os quais são do interesse do presente trabalho, existe a predominância de alguns modelos de turbulência para a sua solução. Um desses modelos é o de Cebeci e Smith (CS) [49], o qual é um modelo algébrico de duas camadas. Este modelo requer um prévio conhecimento da espessura da camada limite do problema a ser resolvido na implementação do código computacional. Portanto, apesar de obter bons resultados, o modelo CS não representa um modelo prático.

Outro modelo bastante utilizado é o de Baldwin e Lomax (BL) [20]. Este é um modelo baseado no CS, com a vantagem de não necessitar o prévio conhecimento da espessura da camada limite. O modelo BL é de fácil

conhecimento da espessura da camada limite. O modelo BL é de fácil implementação computacional e tem apresentado bons resultados e boa aceitação, conforme podem ser vistos nos trabalhos de Ng e Ajmani [24] e Stoke [25]. Além disso, o modelo BL pode ser usado juntamente com outro modelo de turbulência, exemplo disso pode ser visto no trabalho de Goldberg e Chakravarthy [21]. Devido a essas características, o modelo BL foi o escolhido para o presente trabalho. Uma discussão sobre o desempenho do modelo BL e de algumas das suas variantes foi feita por Visbal e Knight [27].

Além da turbulência, o outro fenômeno de importância relevante nos escoamentos supersônicos é a dissipação viscosa, a qual é o responsável pelo aquecimento cinético da superfície. Trabalhos envolvendo transferência de calor em escoamentos turbulentos são bastante discutidos, no entanto, poucos são os trabalhos que apresentam resultados mais detalhados referente a dissipação viscosa, particularmente em aerodinâmica. Alguns resultados envolvendo a dissipação podem ser vistos no livro de Cebeci e Bradshaw [48].

Dessa forma, é importante a inclusão dos termos da dissipação viscosa no código computacional. Essa implementação é muito útil, pois com ela podemos prever a distribuição de temperatura das superfícies estudadas, que também é um dos principais motivos desse trabalho.

Portanto, o presente trabalho tem o objetivo de resolver problemas aerodinâmicos supersônicos com uma abordagem mais próxima da situação física real. Dessa forma, foi usada a metodologia para escoamentos em qualquer regime de velocidade usando variáveis co-localizadas, com a inclusão dos termos da dissipação viscosa na equação da energia. Nas equações utilizadas, foram consideradas a variação da viscosidade molecular com a temperatura e o modelo de turbulência é o de Baldwin e Lomax.

2 - MODELO MATEMÁTICO

2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes utilizadas são as equações de Navier-Stokes e de energia com as seguintes considerações :

- Bidimensional e axissimétrica ;
- forças de campo desprezadas ; e
- inclusão dos termos de dissipação viscosa ;

Com relação ao fluido, o mesmo é admitido newtoniano com viscosidade variável com a temperatura.

As equações escritas vetorialmente têm a seguinte forma

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1.1)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \vec{T} \quad (2.1.2)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.1.3)$$

A equação de estado relacionando P com ρ e T faz o fechamento do problema. Para gases perfeitos ela pode ser escrita da seguinte forma

$$P = \rho RT \quad (2.1.4)$$

Nas equações de conservação, $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ é a derivada material, T é o tensor tensão e Φ é a dissipação viscosa, dada por

$$\Phi = 2 \left[\text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{3} \text{tr}^2 \mathbf{D} \right] \quad (2.1.5)$$

onde \mathbf{D} é o tensor deformação e tr é o traço.

As componentes do tensor deformação são expressas por

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\partial_i u_j + \partial_j u_i \right] \quad (2.1.6)$$

e as componentes do tensor tensão por

$$T_{ij} = -P \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu D_{ij} \quad (2.1.7)$$

Escrevendo as equações de conservação na forma divergente e em coordenadas cartesianas, tem-se

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.1.8)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = & -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y}(\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}) + \\ & \frac{\beta T}{C_p} [\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (P \vec{v}) - P(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})] + \frac{2\mu}{C_p} [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] + \\ & \frac{\mu}{C_p} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2 - \frac{2\mu}{3C_p} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Ou em forma axissimétrica

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho vr)}{\partial r} = 0 \quad (2.1.12)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM Z

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho uvr)}{\partial r} = & -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial u}{\partial r}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z}(\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM R

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho vvr)}{\partial r} = & -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial v}{\partial r}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial v}{\partial r}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r}(\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{v}{r^2} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v T r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\
\frac{\beta T}{C_p} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \vec{V}) - P(\nabla \cdot \vec{V}) \right] &+ \frac{2\mu}{C_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\mu \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \\
\frac{\mu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{2\mu}{3C_p} (\nabla \cdot \vec{V})^2 &+ \frac{2\mu}{C_p} \left(\frac{v}{r} \right)^2
\end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Comparando os dois conjunto de equações, pode-se agrupá-las e escrevê-las em uma forma genérica, como

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v x_2^j)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1.16)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho u v x_2^j)}{\partial x_2} &= - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\
+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) &+ \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mu \nabla \cdot \vec{V})
\end{aligned} \quad (2.1.17)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v v x_2^j)}{\partial x_2} &= - \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &+ \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\mu \nabla \cdot \vec{V}) - 2j \mu \frac{v}{x_2^2}
\end{aligned} \quad (2.1.18)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v T x_2^j)}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k}{C_P} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k}{C_P} x_2^j \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \\
\frac{\beta T}{C_P} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \mathbf{V}) - P(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] &+ \frac{2\mu}{C_P} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
\frac{\mu}{C_P} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2\mu}{3C_P} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 &+ \frac{2\mu_j}{C_P} \left(\frac{v}{x_2} \right)^2
\end{aligned} \quad (2.1.19)$$

onde "j" vale um ($j = 1$) para escoamentos axissimétricos e zero ($j = 0$) para escoamentos bidimensionais, e

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^j v) \quad (2.1.20)$$

Observa-se que as equações governantes contêm os termos que envolvem a compressibilidade do fluido, de forma que, elas podem ser utilizadas para resolver problemas em qualquer regime de velocidade, inclusive os supersônicos.

O interesse deste trabalho está na simulação de escoamentos turbulentos. Entretanto, determinar a solução do escoamento turbulento para qualquer ponto no espaço e no tempo usando as equações de Navier-Stokes e de energia é uma tarefa praticamente impossível devido às características randômicas da turbulência.

Com essa dificuldade, Reynolds [28] propôs que algumas das complicações do escoamento turbulento instantâneo poderiam ser eliminados não tratando os escoamentos em termos instantâneos, mas em propriedades médias num período de tempo suficientemente longo. Baseado nesse princípio, a maioria dos problemas turbulentos são resolvidos, atualmente, empregando-se os conhecidos modelos de turbulência. Revisões recentes sobre os modelos de turbulência e sua aplicabilidade na engenharia podem ser vistas em [40] [22] [41].

Em vista disso, uma variável f é transformada para um valor médio \bar{f} , através de

$$f = \bar{f} + f', \text{ onde}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f \, dt \quad \text{representa o valor médio.} \quad (2.1.21)$$

Na equação acima, Δt deve ser suficientemente grande quando comparado com a flutuação randômica associada à turbulência, mas também suficientemente pequeno em relação às variações do escoamento médio transiente.

Portanto, as variáveis dependentes ficam

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ T &= \bar{T} + T' \\ P &= \bar{P} + P' \\ u_i &= \bar{u}_i + u'_i \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Para escoamentos compressíveis, o uso da média ponderada com a massa específica é conveniente por se obter uma considerável simplificação nas equações do escoamento turbulento. Através da média normal (não ponderada pela massa específica) as equações do movimento bidimensional apresentam cinco termos relacionados às flutuações turbulentas das variáveis, contra um quando a média ponderada é usada. Dessa forma, os valores médios das variáveis ficam definidos por

$$\tilde{u}_i = \frac{\overline{\rho u_i}}{\bar{\rho}} \quad \text{e} \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}} \quad (2.1.23)$$

Com essa nova definição, pode-se escrever as variáveis como,

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i + u''_i \\ T &= \tilde{T} + T'' \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

sendo que os valores médios das novas flutuações não são necessariamente zero ($\overline{f''} \neq 0$) a menos que $\rho' = 0$, mas as médias das novas flutuações multiplicadas pela massa específica, estas sim são iguais a zero, $\overline{\rho f''} = 0$.

Aplicando as definições e fazendo a média no tempo, as Eqs. (2.1.16) a (2.1.19) adquirem a seguinte forma [29]

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u})}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v} x_2^j)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1.25)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM x_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u})}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} x_2^j)}{\partial x_2} = & - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{v}}) \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial(\bar{\rho} u'' u'')}{\partial x_1} - \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\bar{\rho} x_2^j u'' v'')}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u''}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial u''}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u''}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v''}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}'') \end{aligned}$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v})}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} x_2^j)}{\partial x_2} = & - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{v}}) - 2j \mu \frac{\tilde{v}}{x_2^2} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial(\bar{\rho} u'' v'')}{\partial x_1} - \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\bar{\rho} v'' v'' x_2^j)}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial v''}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v''}{\partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u''}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu x_2^j \frac{\partial v''}{\partial x_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}'') - 2j \mu \frac{v''}{x_2^2} \end{aligned}$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{T})}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{T}x_2^J)}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k}{C_P} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k}{C_P} x_2^J \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_2} \right) + \\
\left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{P}\vec{V}) - \bar{P}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] &+ \frac{2\mu}{C_P} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
\frac{\mu}{C_P} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2\mu}{3C_P} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 &+ \frac{2\mu J}{C_P} \left(\frac{\tilde{v}}{x_2} \right)^2 \\
- \frac{\partial(\bar{\rho}u''T'')}{\partial x_1} - \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial(\bar{\rho}v''T''x_2^J)}{\partial x_2} &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k}{C_P} \frac{\partial T''}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k}{C_P} x_2^J \frac{\partial T''}{\partial x_2} \right) + \\
\vec{\nabla} \cdot (\bar{P}'\vec{V}'') - \bar{P}'(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}'') &+ \vec{\nabla} \cdot (\bar{P}''\vec{V}) - \bar{P}''(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \\
\frac{2\mu}{C_P} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}''}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}''}{\partial x_2} \right)^2 \right] &+ \frac{\mu}{C_P} \left(\frac{\partial \bar{u}''}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}''}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2\mu}{3C_P} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}'')^2 + \frac{2\mu J}{C_P} \left(\frac{\bar{v}''}{x_2} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

onde

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^J \tilde{v}) \tag{2.1.29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}'' = \frac{\partial \bar{u}''}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^J \bar{v}'') \tag{2.1.30}$$

Desprezando os termos tipo \bar{f}'' com o argumento da ordem de grandeza e usando o conceito de Boussinesq da viscosidade efetiva, no qual as tensões turbulentas são relacionadas com as tensões médias através da viscosidade turbulenta aparente, e eliminando os tils e barras para simplificar a notação, chega-se às seguintes equações :

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v x_2^j)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1.31)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho u v x_2^j)}{\partial x_2} = & - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_e \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e x_2^j \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_e \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_e \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v v x_2^j)}{\partial x_2} = & - \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_e \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_e \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e x_2^j \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_e \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) - 2j \mu_e \frac{v}{x_2^2} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial(\rho v T x_2^j)}{\partial x_2} = & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k}{C_p} \Big|_e \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k}{C_p} \Big|_e x_2^j \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \\ & \frac{\beta T}{C_p} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (P \vec{V}) - P(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] + \frac{2\mu_e}{C_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ & \frac{\mu_e}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2\mu_e}{3C_p} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 + \frac{2\mu_e}{C_p} j \left(\frac{v^2}{x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

onde

$$\mu_e = \mu + \mu_t$$

e

$$\frac{k}{C_p} \Big|_e = \frac{k}{C_p} + \frac{k}{C_p} \Big|_t$$

sendo que os índices subscritos "e" e "t" referem-se, respectivamente, aos termos efetivos e turbulentos.

2.2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Para resolver problemas sobre geometrias mais complexas, como é o interesse deste trabalho, é conveniente que as equações sejam escritas em coordenadas curvilíneas, que se adaptam à fronteira do domínio físico. Para problemas planos e axissimétricos, a seguinte transformação é empregada

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x_1, x_2) \\ \eta &= \eta(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

As derivadas são transformadas por meio da regra da cadeia, por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\tag{2.2.2}$$

Após uma considerável manipulação algébrica as Eqs. (2.1.31) a (2.1.34), para uma variável Φ , em coordenadas curvilíneas generalizadas ficam na seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial (\rho U \Phi x_2^J)}{\partial \xi} + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial (\rho V \Phi x_2^J)}{\partial \eta} &= \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Gamma^\Phi x_2^J (\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta})] + \\ &\quad \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial \eta} [\Gamma^\Phi x_2^J (\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi})] + \frac{P^\Phi}{J} + \frac{S^\Phi}{J}\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

onde U e V são as velocidades contravariantes, dadas por

$$\begin{aligned}U &= u x_{2\eta} + v x_{1\eta} \\ V &= v x_{1\xi} + u x_{2\xi}\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

e α , β e γ são as métricas da transformação, dadas por

$$\begin{aligned}\alpha &= x_{1\eta}^2 + x_{2\eta}^2 \\ \beta &= x_{1\xi} x_{1\eta} + x_{2\xi} x_{2\eta} \\ \gamma &= x_{1\xi}^2 + x_{2\xi}^2\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

Os valores de Γ , P e S para cada equação de Φ são,

CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\Phi = 1 \quad \Gamma^\Phi = S^\Phi = P^\Phi = 0 \quad (2.2.6)$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_1

$$\Phi = u \quad \Gamma^\Phi = \mu$$

$$P^\Phi = x_{2\eta} \frac{\partial P}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} S^\Phi = J \{ & x_{2\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu(x_{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta})] - x_{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu(x_{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta})] + \\ & \frac{1}{x_2^J} x_{1\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu x_2^J (x_{2\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta})] - \frac{1}{x_2^J} x_{1\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu x_2^J (x_{2\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta})] \} \\ & - \frac{2}{3} [x_{2\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - x_{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v})] \end{aligned}$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X_2

$$\Phi = v \quad \Gamma^\Phi = \mu$$

$$P^\Phi = x_{1\xi} \frac{\partial P}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} S^\Phi = J \{ & x_{2\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu(x_{1\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi})] - x_{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu(x_{1\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi})] + \\ & \frac{1}{x_2^J} x_{1\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu x_2^J (x_{1\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi})] - \frac{1}{x_2^J} x_{1\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu x_2^J (x_{1\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi})] \} \\ & - \frac{2}{3} [x_{1\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - x_{1\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v})] - 2\mu_j \frac{v}{x_2^2} \end{aligned}$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\Phi = T \quad \Gamma^\Phi = \frac{k}{C_p}$$

$$P^\Phi = \frac{\beta T}{J C_p} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{P} V) - P(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.2.9)$$

$$S^\Phi = \frac{J 2\mu}{C_p} \left[\left(x_{1\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - x_{1\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{J^2} \left(\frac{Jv}{x_2} \right)^2 + \left(x_{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \right. \\ \left. \frac{1}{3J^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 + \frac{1}{2} \left(x_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + y_{\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

2.3 COMPORTAMENTO DA VISCOSIDADE COM A TEMPERATURA

Como nos escoamentos a alta velocidade considerando a dissipação viscosa há uma variação muito grande de temperatura, não se pode mais assumir a hipótese da viscosidade constante. Para avaliar essa variação, foi utilizada a lei de Sutherland [38][27]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (2.3.1)$$

onde, μ_0 é o valor da viscosidade na temperatura de referência T_0 , cujo valor utilizado nos problemas foi de 273 K e S é uma constante, que para o ar vale 110 K.

Além da Eq. (2.3.1), foi também utilizada a seguinte relação

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^w, \quad \text{onde } 0,5 < w \leq 1; \quad (2.3.2)$$

para o problema do escoamento laminar sobre a placa plana isotérmica com dissipação viscosa, onde "w" foi feito igual a unidade.

2.4 MODELO DE TURBULÊNCIA

O interesse principal deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo numérico que possibilite o cálculo do aumento de temperatura nas superfícies causado pela dissipação viscosa devida a escoamentos a alta velocidade. Em particular está-se interessado em geometrias do tipo foguete que apresentam, em geral, um escoamento predominante ao longo da superfície. Para problemas que apresentam estas características, o modelo de Baldwin e Lomax (B-L) tem sido largamente empregado [23] [24] [27]. Seguindo esta tendência existente na área de aerodinâmica, também neste trabalho é usado o modelo de Baldwin e Lomax.

O modelo B-L propõe a existência de uma camada interna e outra externa, cujo acoplamento é feito através de

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{\text{inner}} & y \leq y_{\text{crossover}} \\ (\mu_t)_{\text{outer}} & y_{\text{crossover}} \leq y \end{cases} \quad (2.4.1)$$

onde y é a distância normal à parede e $y_{\text{crossover}}$ é o menor valor de y para o qual os valores de μ_t para a região interna e externa são iguais.

A formulação de Prandtl-Van Driest é usada na região interna, como

$$(\mu_t)_{\text{inner}} = \rho \ell^2 |w| \quad (2.4.2)$$

onde $|w|$ é o módulo do vetor vorticidade e ℓ é obtido por

$$\ell = ky[1 - \exp(-y^+/A^+)] \quad (2.4.3)$$

e

$$y^+ = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w} y \quad (2.4.4)$$

Para a região externa é usada uma formulação similar a de Clauser, onde μ_t é dado por

$$(\mu_t)_{\text{outer}} = K C_{cp} F_{\text{wake}} F_{\text{Kleb}}(y) \quad (2.4.5)$$

onde K é a constante de Clauser, C_{cp} é uma constante adicional e

$$F_{wake} = \text{o menor de} \left\{ \begin{array}{l} y_{MAX} F_{MAX} \\ \text{ou} \\ C_{WK} y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX} \end{array} \right\} \quad (2.4.6)$$

sendo que os valores de y_{MAX} e F_{MAX} são obtidos através da função

$$F(y) = y|w|[1 - \exp(-y^+/A^+)] \quad (2.4.7)$$

onde F_{MAX} é o valor máximo de $F(y)$ num perfil e y_{MAX} é o valor de y onde isso ocorre. A função $F_{Kleb}(y)$ é o fator intermitente de Klebanoff dado por

$$F_{Kleb}(y) = \left[1 + 5,5 \left[\frac{C_{Kleb} y}{y_{MAX}} \right]^6 \right]^{-1} \quad (2.4.8)$$

O valor de U_{DIF} , para uma determinada posição x , é a diferença entre os módulos das velocidades máxima e mínima computadas no perfil de velocidade ao longo de y (ou η) naquela posição x .

Para escoamentos sobre superfícies existe uma região perto da borda de ataque onde o escoamento é laminar. Nesta região, cujo comprimento depende do número de Reynolds, a viscosidade turbulenta deve ser igual a zero. No modelo B-L, isto é conseguido fazendo-se μ_t igual a zero sempre que o valor máximo computado para μ_t naquele perfil ao longo de y (ou η) for menor que o valor especificado, isto é,

$$\mu_t = 0 \text{ se } (\mu_t)_{\text{max do perfil}} < C_{MUTM} \mu_{\infty} \quad (2.4.9)$$

As constantes usadas têm os seguintes valores [20]

$$\begin{array}{ll} A^+ = 26 & k = 0,4 \\ C_{cp} = 1,6 & K = 0,0168 \\ C_{Kleb} = 0,3 & Pr = 0,72 \\ C_{WK} = 0,25 & Prt = 0,9 \\ C_{MUTM} = 14 & \end{array}$$

Vale observar que o modelo apenas prevê a passagem da região laminar para a turbulenta, mas não contempla a região de transição.

3 - MODELO NUMÉRICO

No intuito de resolver escoamentos em regime turbulento sobre superfícies, o modelo numérico utilizado baseou-se na metodologia desenvolvida para qualquer regime de velocidade [6], estendido para a disposição co-localizada das variáveis [14], empregando método SIMPLEX [32] para o acoplamento pressão-velocidade e no modelo de turbulência de Baldwin e Lomax [20].

Breves descrições do modo de armazenamento das variáveis, da obtenção das equações discretizadas, do modo de aplicar as condições de contorno, dos detalhes sobre o cálculo da viscosidade turbulenta, da forma usada para avaliar os coeficientes difusivos nas faces, do procedimento de solução e do critério de convergência serão apresentados neste capítulo.

3.1 ARMAZENAMENTO DAS VARIÁVEIS

O predomínio atual do uso do arranjo de variáveis desencontradas, proposto por Harlow e Welch [30], é devido principalmente a boa avaliação das velocidades nas faces, a qual é calculada em função do gradiente de pressão fisicamente consistente, conforme pode ser visto na Fig.(3.1.1). Portanto, este arranjo introduz um forte acoplamento entre a pressão e a velocidade.

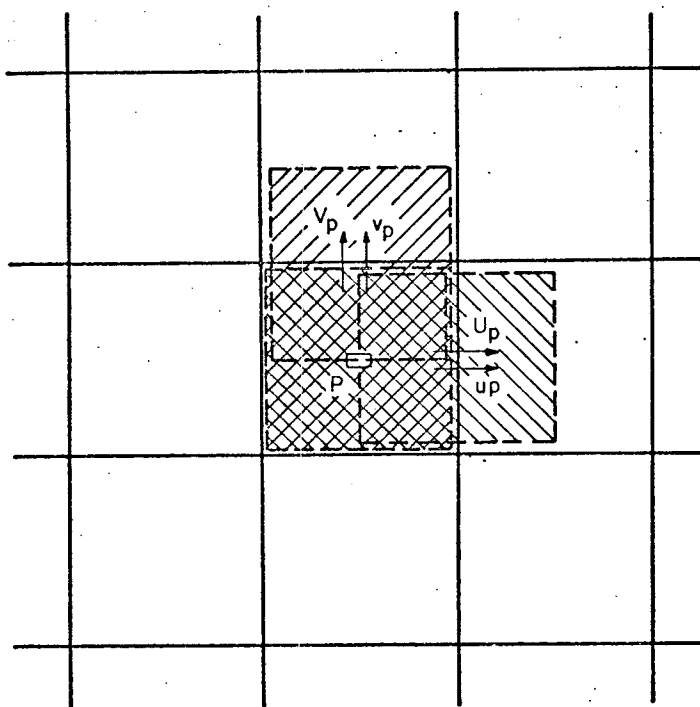


Fig. 3.1.1 - Disposição desencontrada das variáveis na malha.

O arranjo desencontrado ficou consagrado com a influência de Patankar através do seu bastante difundido livro [2], e com isso, por um longo período, poucas tentativas foram feitas para usar o arranjo co-localizado das variáveis e ao mesmo tempo manter um adequado acoplamento entre a pressão e a velocidade.

No entanto, devido a problemas como a falta de memória computacional e a complexidade dos problemas tridimensionais com o arranjo desencontrado, o uso das variáveis co-localizadas voltou a despertar o interesse dos pesquisadores. Nesse sentido, a principal limitação a ser superada era a avaliação das velocidades nas faces usando gradientes de pressões mais consistentes. Tentativas pioneiras neste sentido podem ser vistas em Rhie [11], Hsu [12] e Peric et al. [13].

Com base nos trabalhos de Peric et al. [13] para coordenadas cartesianas e escoamentos incompressíveis, Marchi, Maliska e Bortoli [14] desenvolveram uma metodologia para escoamentos a qualquer velocidade usando a disposição co-localizada das variáveis, a qual foi utilizada no presente trabalho. O posicionamento das variáveis para a disposição co-localizada pode ser visto na Fig. 3.1.2.

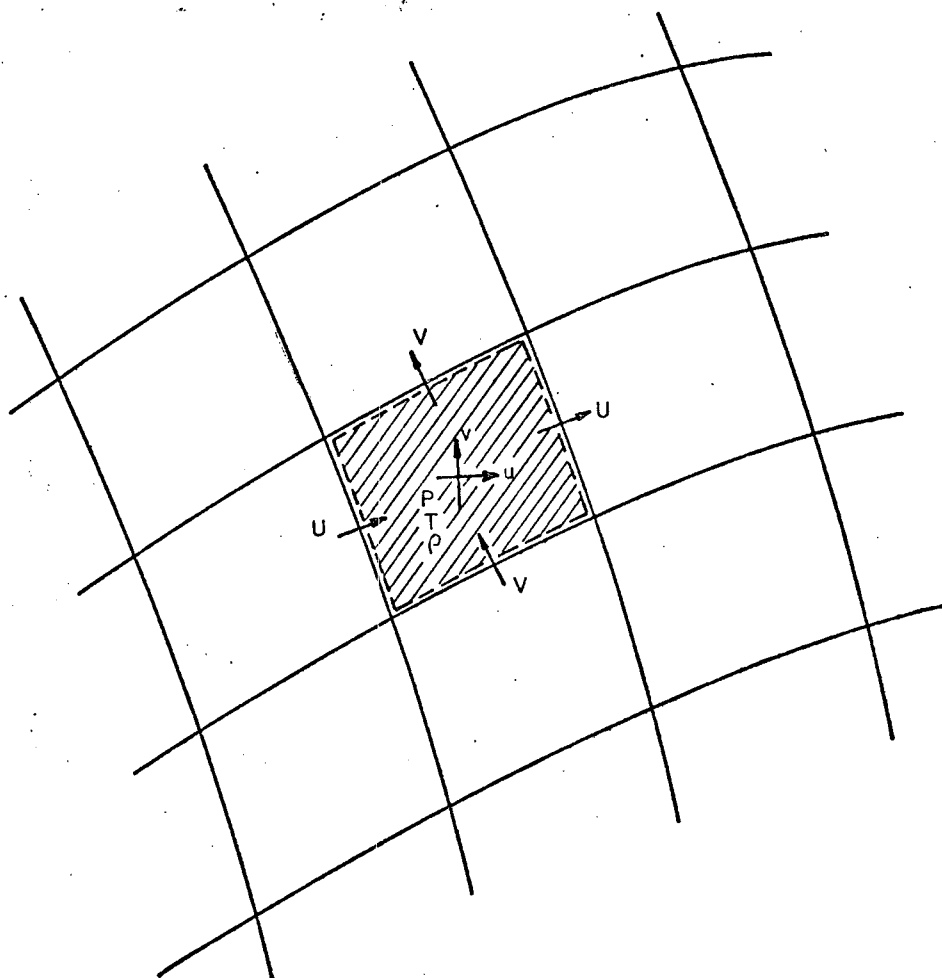


Fig. 3.1.2 - Disposição co-localizada das variáveis na malha.

3.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Usando-se o método dos volumes finitos, a obtenção das equações de conservação é feita integrando-se a equação na forma divergente no tempo e sobre o volume de controle elementar.

As hipóteses numéricas consideradas na integração são [8]:

- $\rho\Phi$ e S^Φ são constantes no volume de controle ;
- Todos os termos exceto $(\rho\Phi)$ são constantes ao longo de Δt e são avaliados em $t+\Delta t$ (formulação implícita) ;

- Os fluxos de massa nas faces são uniformes ao longo de cada face ;
- Φ e sua derivada normal à face variam linearmente ao longo dessa face.

Integrando a Eq.(2.2.3), reescrita abaixo por completeza, sobre o volume mostrado na Fig.(3.2.1), encontra-se a Eq.(3.2.2).

$$\int_{V,t} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial (\rho U \Phi x_2^J)}{\partial \xi} + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial (\rho V \Phi x_2^J)}{\partial \eta} \right] x_2^J dV dt = \quad (3.2.1)$$

$$\int_{V,t} \left\{ \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma^\Phi x_2^J J \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{x_2^J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma^\Phi x_2^J J \left(\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{P^\Phi}{J} + \frac{S^\Phi}{J} \right\} x_2^J dV dt$$

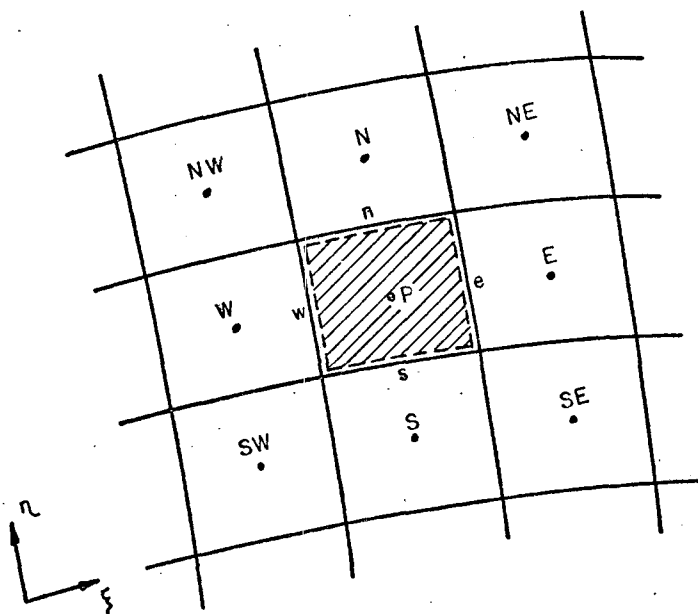


Fig. 3.2.1 - Volume de controle genérico para integração.

$$\begin{aligned}
\frac{M_P \Phi_P - M_P^{\circ} \Phi_P^{\circ}}{\Delta t} + M_e \Phi_e + M_w \Phi_w + M_n \Phi_n + M_s \Phi_s = (D_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta})_e \\
- (D_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta})_w + (D_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi})_n + (D_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi})_s \\
- x_2^J L[P^{\Phi}] \frac{\Delta V}{J} + x_2^J L[S^{\Phi}] \frac{\Delta V}{J}
\end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde $D_1 = \Gamma^{\Phi} \alpha J \Delta \eta$, $D_2 = \Gamma^{\Phi} \beta J \Delta \eta$, $D_3 = \Gamma^{\Phi} \gamma J \Delta \xi$, $D_4 = \Gamma^{\Phi} \beta J \Delta \xi$

Usando a interpolação WUDS [19], obtemos Φ e $\frac{\partial \Phi}{\partial (\)}$ nas faces através de

$$\Phi_e = (1/2 + \bar{\alpha}_e) \Phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_e) \Phi_E \quad (3.2.3)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}|_e = \bar{\beta}_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta \xi} \quad (3.2.4)$$

onde, $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são calculados por

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1} \quad (3.2.5)$$

$$\bar{\beta} = Pe - \frac{e^{Pe/2}}{e^{Pe} - 1} \quad (3.2.6)$$

Sabendo que o sinal de $\bar{\alpha}$ será sempre o sinal de Pe e procurando expressões mais simples, podemos aproximar as Eqs.(3.2.5) e (3.2.6) por [31]

$$|\bar{\alpha}| = \frac{Pe^2}{10 + 2Pe^2} \quad (3.2.7)$$

$$\bar{\beta} = \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2}$$

Aplicando equações análogas às Eqs. (3.2.3) e (3.2.4) nas demais faces do volume de controle a Eq.(3.2.2), resulta

$$a_p^\Phi = a_e^\Phi + a_w^\Phi + a_n^\Phi + a_s^\Phi + a_{ne}^\Phi + a_{nw}^\Phi + a_{se}^\Phi + a_{sw}^\Phi + b^\Phi \quad (3.2.8)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_p^\Phi &= \frac{M_p^\circ}{\Delta t} + a_e^\Phi + a_w^\Phi + a_n^\Phi + a_s^\Phi \\ a_w^\Phi &= (1/2 + \bar{\alpha}_w) M_w + \frac{(D_1 \bar{\beta})_w}{\Delta \xi} + \frac{D_{4s} - D_{4n}}{4\Delta \xi} \\ a_e^\Phi &= - (1/2 - \bar{\alpha}_e) M_e + \frac{(D_1 \bar{\beta})_e}{\Delta \xi} + \frac{D_{4n} - D_{4s}}{4\Delta \xi} \\ a_s^\Phi &= (1/2 + \bar{\alpha}_s) M_s + \frac{(D_3 \bar{\beta})_s}{\Delta \eta} + \frac{D_{2w} - D_{2e}}{4\Delta \eta} \\ a_w^\Phi &= - (1/2 - \bar{\alpha}_n) M_n + \frac{(D_3 \bar{\beta})_n}{\Delta \eta} + \frac{D_{2e} - D_{2w}}{4\Delta \eta} \\ a_{ne}^\Phi &= \frac{D_{2e}}{4\Delta \eta} + \frac{D_{4n}}{4\Delta \xi} \\ a_{nw}^\Phi &= - \frac{D_{2w}}{4\Delta \eta} - \frac{D_{4n}}{4\Delta \xi} \\ a_{se}^\Phi &= - \frac{D_{2e}}{4\Delta \eta} - \frac{D_{4s}}{4\Delta \xi} \\ a_{sw}^\Phi &= \frac{D_{2w}}{4\Delta \eta} + \frac{D_{4s}}{4\Delta \xi} \end{aligned}$$

$$b^\Phi = x_{2p}^J \frac{\Delta V}{J} L[P^\Phi] + x_{2p}^J \frac{\Delta V}{J} L[S^\Phi] + \frac{M_{pp}^\circ}{\Delta t}$$

Os termos fontes $L[P^\Phi]$ e $L[S^\Phi]$ são aproximados por meio de diferenças centrais. Desta forma os termos ficam

TERMOS FONTE PARA u

$$L[P^u] = \frac{P_E - P_W}{2\Delta\xi} x_{2\eta P} - \frac{P_N - P_S}{2\Delta\eta} x_{2\xi P} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} L[S^u] = & x_{1\xi P} (UA_n - UA_s) - x_{1\eta P} (UA_e - UA_w) + \\ & x_{2P}^J [x_{2\eta P} (UB_e - UB_w) - x_{2\xi P} (UB_n - UB_s)] + \\ & \frac{2}{3} x_{2P}^J \{ x_{2\xi P} [(\mu DIV)_n - (\mu DIV)_s] - x_{2\eta P} [(\mu DIV)_e - (\mu DIV)_w] \} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

onde, para face "e", por exemplo, tem-se

$$UA_e = \mu_e x_{2e}^J J_e \left(x_{2\eta e} \frac{v_E - v_P}{\Delta\xi} - x_{2\xi e} \frac{v_N + v_{NE} - v_S - v_{SE}}{4\Delta\eta} \right) \quad (3.2.11)$$

$$UB_e = \mu_e J_e \left(x_{2\eta e} \frac{u_E - u_P}{\Delta\xi} - x_{2\xi e} \frac{u_N + u_{NE} - u_S - u_{SE}}{4\Delta\eta} \right) \quad (3.2.12)$$

$$DIV|_e = J_e \left(\frac{U_E - U_P}{\Delta\xi} + \frac{V_{ne} + V_n - V_s - V_{se}}{2\Delta\eta} \right) + \frac{v_j}{2x_2}|_e \quad (3.2.13)$$

TERMOS FONTE PARA v

$$L[P^v] = \frac{P_N - P_S}{2\Delta\eta} x_{1\xi P} - \frac{P_E - P_W}{2\Delta\xi} x_{1\eta P} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} L[S^v] = & x_{1\xi P} (VA_n - VA_s) - x_{1\eta P} (VA_e - VA_w) + \\ & x_{2P}^J [x_{2\eta P} (VB_e - VB_w) - x_{2\xi P} (VB_n - VB_s)] + \\ & \frac{2}{3} x_{2P}^J \{ x_{1\eta P} [(\mu DIV)_e - (\mu DIV)_w] - x_{1\xi P} [(\mu DIV)_n - (\mu DIV)_s] \} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

sendo que para face "e", tomada como exemplo, tem-se

$$VA_e = \mu_e x_{2e}^j J_e (x_{1\xi_e} \frac{v_N + v_{NE} - v_S - v_{SE}}{4\Delta\eta} - x_{1\eta_e} \frac{v_E - v_P}{\Delta\xi}) \quad (3.2.16)$$

$$VB_e = \mu_e J_e (x_{1\xi_e} \frac{u_N + u_{NE} - u_S - u_{SE}}{4\Delta\eta} - x_{1\eta_e} \frac{u_E - u_P}{\Delta\xi}) \quad (3.2.17)$$

TERMOS FONTE PARA T

$$L[P^T] = \frac{1}{C_P} \left\{ \frac{P^0 x_2^j}{J \Delta t} \Big|_P + P_P \left[\frac{1}{J \Delta t} - \frac{x_2^j U}{2 \Delta \xi} \Big|_e + \frac{x_2^j U}{2 \Delta \xi} \Big|_w - \frac{x_2^j V}{2 \Delta \eta} \Big|_n + \frac{x_2^j V}{2 \Delta \eta} \Big|_s \right] \right. \\ \left. + P_E \frac{x_2^j U}{2 \Delta \xi} \Big|_e - P_W \frac{x_2^j U}{2 \Delta \xi} \Big|_w + P_N \frac{x_2^j V}{2 \Delta \eta} \Big|_n - P_S \frac{x_2^j V}{2 \Delta \eta} \Big|_s \right\} \quad (3.2.18)$$

$$L[S^T] = \frac{2}{C_P} \mu_P J_P x_2^j \left[(x_{1\xi_P} DVDE_P - x_{1\eta_P} DVDK_P)^2 + (x_{2\eta_P} DUDK_P - x_{2\xi_P} DUDE_P)^2 - DIV_P^2 / 3 J_P + (x_{1\xi_P} DUDE_P - x_{1\eta_P} DUDK_P + \right. \\ \left. x_{2\eta_P} DVDK_P - x_{2\xi_P} DVDE_P)^2 / 2 + (v_P / x_2^j J_P)^2 / 2 \right] \quad (3.2.19)$$

onde,

$$DUDE_P = \frac{u_N - u_S}{2\Delta\eta} \quad DUDK_P = \frac{u_E - u_W}{2\Delta\xi} \\ DVDE_P = \frac{v_N - v_S}{2\Delta\eta} \quad DVDK_P = \frac{v_E - v_W}{2\Delta\xi} \quad (3.2.20) \\ DIV_P = J_P \left(\frac{U_P - U_W}{\Delta\xi} + \frac{V_P - V_S}{\Delta\eta} \right) + \frac{v_j}{x_2^j}$$

3.3 EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO

Conforme já comentado, a metodologia aqui utilizada, desenvolvida por Silva e Maliska [7], tem como base os métodos empregados para a solução de escoamentos incompressíveis. Portanto, o uso de métodos para o tratamento de acoplamento pressão-velocidade, agora acoplamento pressão-velocidade/densidade também é feito aqui.

O método de acoplamento pressão-velocidade utilizado é o SIMPLEC [32], com a inclusão da densidade nesse acoplamento.

Essa metodologia não seria necessária se o interesse fosse resolver apenas problemas de camada limite, uma vez que a pressão já não seria mais incógnita. Como o presente trabalho pretende resolver problemas também elípticos, essa metodologia é usada em todos os casos apresentados, inclusive os problemas de camada limite. Nestes, os resultados obtidos para os campos de pressão são aparentemente uniformes. No entanto, há uma pequena variação de pressão que é usada para corrigir a velocidade no acoplamento pressão-velocidade.

Neste método, a equação para a pressão é obtida a partir da equação da conservação da massa, conforme a maioria dos métodos para escoamentos incompressíveis.

Através da integração da equação da conservação da massa, Eq. (2.2.1) com Eq. (2.2.3), obtemos a sua forma discretizada

$$\frac{M_P - M_P^o}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (3.3.1)$$

onde o fluxo de massa \dot{M}_e é dada por

$$\dot{M}_e = \rho U \Delta \eta x_2^j|_e$$

com os demais fluxos avaliados de forma análoga.

A linealização que permite que escoamentos incompressíveis e/ou compressíveis sejam tratados com o mesmo modelo numérico [3][2] tem a forma

$$\dot{M}_e = (\rho^* U + \rho U^* - \rho^{**} U^{**}) \Delta \eta x_2^j|_e \quad (3.3.2)$$

onde a massa específica na interface é avaliada da seguinte forma

$$\rho_e = (1/2 + \bar{\gamma})\rho_p + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_E$$

$$\rho_e^* = (1/2 + \bar{\gamma})\rho_p^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_E^* \quad (3.3.3)$$

com os valores de $\bar{\gamma}$ assumindo +0,5 ou -0,5, conforme o sentido do fluxo de massa, caracterizando uma formulação "upwind" para a massa específica.

Substituindo a Eq.(3.3.3) na Eq.(3.3.2), com procedimento análogo para os demais fluxos, M_w , M_n e M_s e posteriormente aplicados na Eq.(3.3.1), a equação da conservação da massa resulta em

$$m_p^p \rho_p + m_e^p \rho_E + m_w^p \rho_w + m_n^p \rho_n + m_s^p \rho_s + m_p^u U_p + m_w^u U_w + m_p^v V_p + m_s^v V_s = b^c \quad (3.3.4)$$

onde

$$m_e^p = (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta|_e$$

$$m_w^p = - (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta|_w$$

$$m_n^p = (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi|_n$$

$$m_s^p = - (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi|_s$$

$$m_p^u = [(1/2 + \bar{\gamma})\rho_p^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_E^*] x_2^j \Delta \eta|_e$$

$$m_w^u = - [(1/2 + \bar{\gamma})\rho_w^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_p^*] x_2^j \Delta \eta|_w$$

$$m_p^v = [(1/2 + \bar{\gamma})\rho_p^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_n^*] x_2^j \Delta \xi|_n$$

$$m_s^v = - [(1/2 + \bar{\gamma})\rho_s^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_p^*] x_2^j \Delta \xi|_s$$

$$b^c = - \frac{x_2^j \rho_p^0 \Delta V}{J_p \Delta t} + m_p^u U_p^* + m_w^u U_w^* + m_p^v V_p^* + m_s^v V_s^*$$

Nas expressões anteriores, a velocidade contravariante U na face "e" é denominada U_p e V na face norte V_p , conforme Fig. 3.3.1. Esta nomenclatura é empregada para facilitar a implementação computacional.

A Eq. 3.3.4 envolve como incógnitas ρ , U e V nas faces do volume de controle para a conservação da massa. Escrevendo ρ , U e V em função do campo de pressão P , obtém-se uma equação para a pressão. Os passos para chegar a este objetivo são agora realizados. Inicialmente deve-se linearizar as equações de estado e de movimento.

Linearizando a equação de estado, obtém-se

$$\rho = C^{\rho} P \quad \text{sendo que } C^{\rho} = 1/RT \quad (3.3.5)$$

Se para um campo estimado P^* de pressão a densidade obtida é ρ^* , a subtração das duas equações fornece

$$\rho = \rho^* + C^{\rho} P' \quad , \quad (3.3.6)$$

$$\text{onde } P' = P - P^* \quad (3.3.7)$$

As componentes contravariantes também devem ser escritas em função de P' . Como o arranjo de variáveis é co-localizado, é necessário computar a componente contravariante na interface em função das componentes cartesianas armazenadas no centro do volume. Seguindo o procedimento proposto por Marchi e Maliska [39], estas velocidades são determinadas fazendo-se uso das equações do movimento para as componentes cartesianas para os volumes vizinhos, conforme Fig. 3.3.1. O procedimento cria uma equação do movimento aproximada para as velocidades na face, onde os coeficientes desta equação são obtidos por média dos coeficientes das equações para as velocidades vizinhas.

A equação discretizada para a velocidade u_p é dada por

$$a_{PP} u_P = \left(\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \right)_P + b^u - L[P^u] \quad (3.3.8)$$

e para u_E por

$$a_{PE} u_E = \left(\sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \right)_E + b^u - L[P^u] \quad (3.3.9)$$

ou, reescrevendo de forma compacta, como

$$a_{PP} u_P = \hat{a}_{PP} \hat{u}_P + L[P^u]_P \quad (3.3.10)$$

$$a_{PE} u_E = \hat{a}_{PE} \hat{u}_E + L[P^u]_E \quad (3.3.11)$$

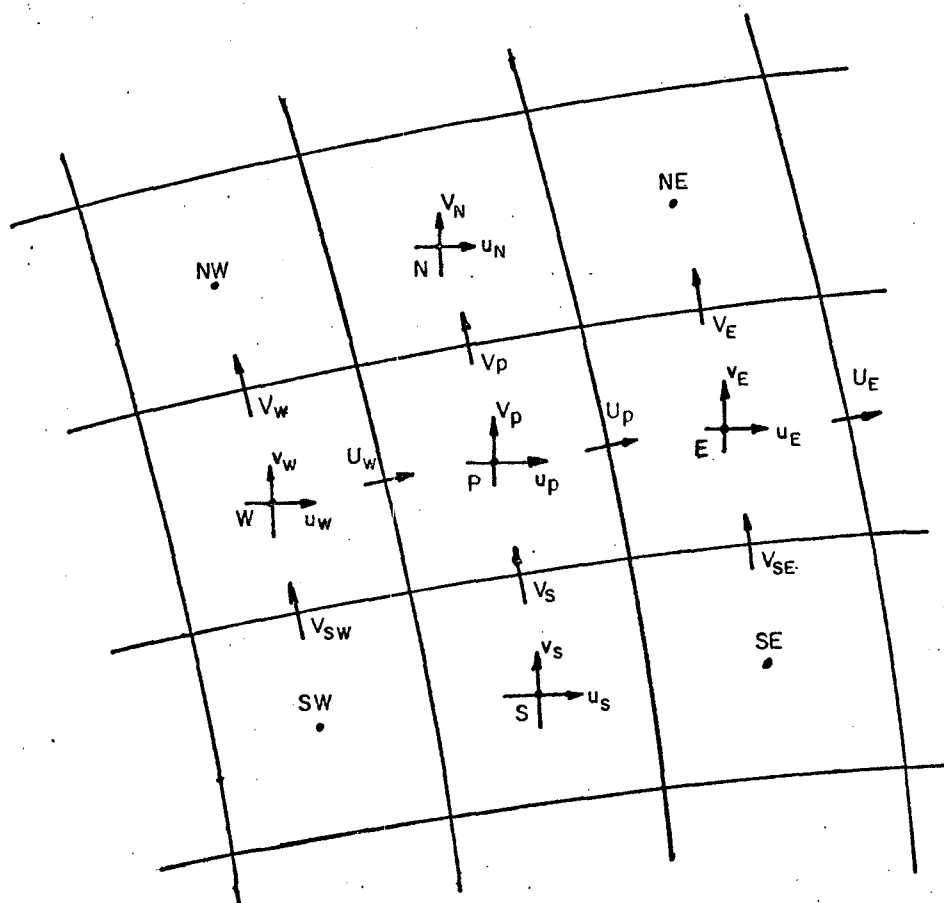


Fig. 3.3.1 - Posição das velocidades nos volumes de controle.

A partir dessas equações, calcula-se a velocidade na face "e", usando-se o gradiente de pressão na face, $L[P^u]_e$, como se o arranjo fosse desencontrado, ao invés da média simples dos gradientes dos volumes adjacentes. Desta forma,

$$a_{Pe} u_e = \frac{1}{2} (\hat{a}_{PP} \hat{u}_P + \hat{a}_{PE} \hat{u}_E) + L[P^u]_e \quad (3.3.12)$$

onde

$$a_{Pe} = (a_{PP} + a_{PE}) / 2 \quad (3.3.13)$$

Portanto,

$$u_e = \frac{ (\hat{a}_{PP} \hat{u}_P + \hat{a}_{PE} \hat{u}_E) + 2 L[P^u]_e }{ (a_{PP} + a_{PE}) } \quad (3.3.14)$$

que para um campo estimado de P^* fica

$$u_e^* = \frac{ (\hat{a}_{PP} \hat{u}_P + \hat{a}_{PE} \hat{u}_E) + 2 L[P^*u]_e }{ (a_{PP} + a_{PE}) } \quad (3.3.15)$$

Subtraindo-sé a Eq. (3.3.15) da Eq. (3.3.14) obtém-se

$$u_e = u_e^* + \frac{2}{(a_{PP} + a_{PE})} L[P'^u]_e$$

ou

$$u_e = u_e^* + d_e^u L[P'^u]_e \quad (3.3.16)$$

onde $P' = P - P^*$

Da mesma forma tem-se para v_e ,

$$v_e = v_e^* + d_e^v L[P'^v]_e \quad (3.3.17)$$

Com u_e e v_e calculados, obtém-se a velocidade contravariante na face leste, U_P , por

$$U_P = u_e x_{e2\eta} - v_e x_{e1\eta} \quad (3.3.18)$$

ou

$$U_P = U_P^* + d_e^u \{ L[P^u]_e x_{2\eta e} - L[P^v]_e x_{1\eta e} \} \quad (3.3.19)$$

onde

$$L[P^u]_e = \frac{P'_E - P'_P}{\Delta \xi} x_{2\eta} - \frac{P'_{NE} + P'_N - P'_S - P'_{SE}}{4\Delta \eta} x_{2\xi} \quad (3.3.20)$$

$$L[P^v]_e = \frac{P'_E - P'_P}{\Delta \xi} x_{1\eta} - \frac{P'_{NE} + P'_N - P'_S - P'_{SE}}{4\Delta \eta} x_{1\xi} \quad (3.3.21)$$

Substituindo a Eq. (3.3.20) e a Eq. (3.3.21) na Eq. (3.3.19) obtém-se

$$U_P = U_P^* - d_e^u \left\{ \alpha_e \frac{P'_E - P'_P}{\Delta \xi} - \beta_e \frac{P'_{NE} + P'_N - P'_S - P'_{SE}}{4\Delta \eta} \right\} \quad (3.3.22)$$

Da mesma forma podem ser determinadas as velocidades para as demais faces. Por exemplo, para a face norte, tem-se

$$V_P = V_P^* - d_n^v \left\{ \gamma_n \frac{P'_N - P'_S}{\Delta \eta} - \beta_n \frac{P'_{NE} + P'_E - P'_W - P'_{NW}}{4\Delta \xi} \right\} \quad (3.3.23)$$

Substituindo as expressões do tipo das Eqs. (3.3.6), (3.3.22) e (3.3.23) na Eq. (3.3.4) obtém-se a equação para a pressão

$$a_P P'_P = a_e P'_E + a_w P'_W + a_n P'_N + a_s P'_S + a_{ne} P'_{NE} + a_{se} P'_{SE} + a_{nw} P'_{NW} + a_{sw} P'_{SW} + a_{nw} P'_{NW} + a_{sw} P'_{SW} + b^P \quad (3.3.24)$$

onde

$$a_P = m_P^{\rho\rho} + m_e^u d_e^u \alpha_e - m_w^u d_w^u \alpha_w + m_n^v d_n^v \alpha_n - m_s^v d_s^v \alpha_s$$

$$a_e = m_e^{\rho} C_e^{\rho} - m_e^u d_e^u \alpha_e + m_n^v d_n^v \beta_n^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} - m_s^v d_s^v \beta_s^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_w = m_w^{\rho} C_w^{\rho} + m_w^u d_w^u \alpha_w - m_n^v d_n^v \beta_n^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} - m_s^v d_s^v \beta_s^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_n = m_n^{\rho} C_n^{\rho} - m_n^v d_n^v \alpha_n + m_e^u d_e^u \beta_e^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} - m_w^u d_w^u \beta_w^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta}$$

$$a_s = m_s^{\rho} C_s^{\rho} + m_s^v d_s^v \alpha_s - m_e^u d_e^u \beta_e^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} - m_w^u d_w^u \beta_w^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta}$$

$$a_{ne} = + m_e^u d_e^u \beta_e^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} + m_n^v d_n^v \beta_n^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_{se} = - m_e^u d_e^u \beta_e^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} + m_s^v d_s^v \beta_s^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_{nw} = + m_w^u d_w^u \beta_w^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} - m_n^v d_n^v \beta_n^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$a_{sw} = - m_w^u d_w^u \beta_w^u \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} - m_s^v d_s^v \beta_s^v \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi}$$

$$b^P = \frac{x_P^j \rho_P^0 \Delta V}{J_P \Delta t} - m_P^{\rho} \rho_P^* - m_e^{\rho} \rho_e^* - m_w^{\rho} \rho_w^* - m_n^{\rho} \rho_n^* - m_s^{\rho} \rho_s^*$$

3.4 APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nesse trabalho, pontos fictícios são usados para aplicar as condições de contorno. Essa preferência se deve a sua simplicidade e a sua facilidade de manuseio.

Para a solução dos sistemas lineares foi empregado o Modified Strongly Implicit Procedure, MSI [18].

O MSI é um procedimento fortemente implícito para a solução de sistemas de equações algébricas. Ele foi formulado inicialmente para esquemas de nove pontos, do interesse desse trabalho, mas pode ser usado para esquema de 5, 19 e 27 pontos. Para resolver os

sistemas de equações, são necessários, logicamente, conhecer os coeficientes das variáveis e os termos independentes.

Neste trabalho, os pontos que entram no sistema de equações incluem também os pontos fictícios e dessa forma, portanto, para aplicar as condições de contorno, é necessário estabelecer os coeficientes e os termos independentes desses pontos.

Para a pressão, as condições de contorno estão incluídas nos próprios volumes de fronteira. Portanto, os pontos fictícios não são considerados no sistema de equações, no caso da pressão.

A seguir, serão mostrados as condições de contorno utilizadas, a forma como são implementadas e como ficam os coeficientes e os termos independentes para os pontos fictícios considerando a seguinte equação algébrica usada no MSI

$$A_P \Phi_P + \sum_{nb} A_{nb} \Phi_{NB} = S_P^{\Phi} \quad (3.4.1)$$

3.4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA VELOCIDADE E TEMPERATURA

- Condição de variável prescrita na entrada.

Nesse caso as variáveis são prescritas nos próprios pontos fictícios, e dessa forma, os coeficientes e os termos independentes para os pontos fictícios ficam

$$A_P = 1, S_P^{\Phi} = \Phi_{\text{prescrito}}, \text{ e } A_{nb} = 0, \text{ para } \forall nb$$

gerando a seguinte condição, conforme Fig. 3.4.1,

$$\Phi_P = \Phi_{\text{prescrito}}$$

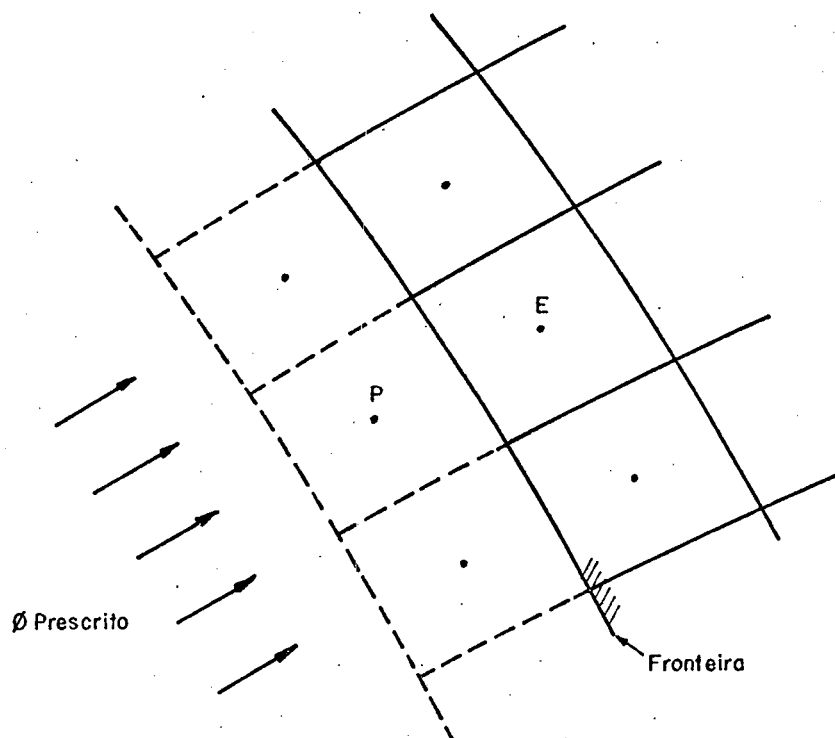


Fig. 3.4.1 - Condição de contorno prescrita na entrada.

- Condição de variável prescrita no contorno.

Nesse caso, o valor prescrito no contorno é obtido por meio da média simples entre o valor do volume adjacente ao contorno e o valor do volume fictício, conforme Fig. 3.4.2.

$$\Phi_{\text{prescrito}} = \frac{\Phi_N + \Phi_P}{2} \longrightarrow \Phi_P = 2 \Phi_{\text{prescrito}} - \Phi_N$$

e os coeficientes e os termos independentes da Eq. 3.4.1 ficam

$$A_P = 1, A_n = 1, S_P^\Phi = 2 \Phi_{\text{prescrito}} \text{ e demais coeficientes } A_{nb} = 0$$

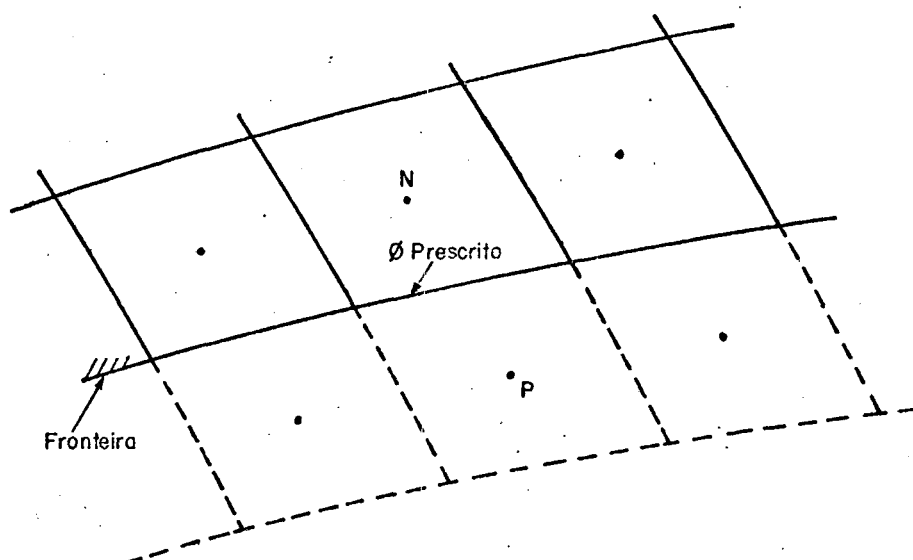


Fig. 3.4.2 - Condição de variável prescrita no contorno.

- Condições de simetria, de saída parabólica e de derivada nula.

Nessa situação, as condições de contorno apresentam a derivada nula, portanto,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi_P = \Phi_W,$$

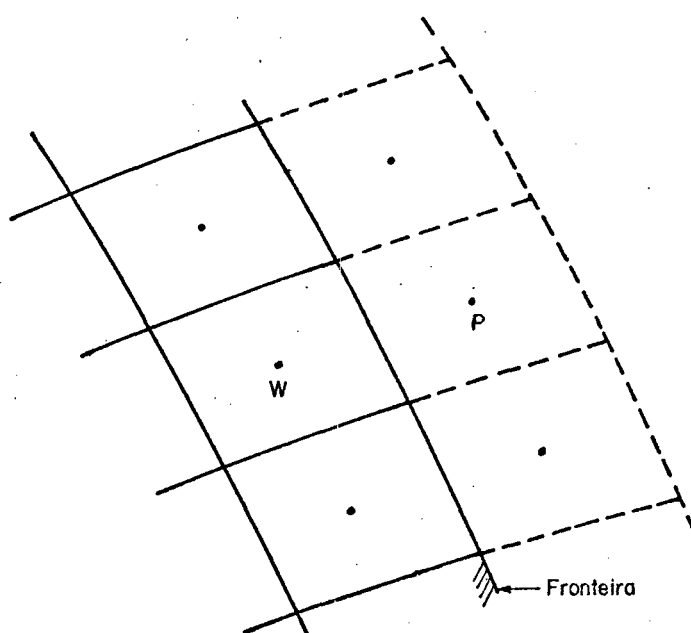


Fig. 3.4.3 - Condição de simetria, de saída parabólica e de derivada nula.

com isso, os coeficientes e os termos independentes da Eq. 3.4.1 ficam

$$A_P = 1, A_W = -1, S_P^\Phi = 0 \text{ e os demais coeficientes } A_{nb} = 0$$

3.4.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA PRESSÃO E DENSIDADE

Para a pressão, os pontos fictícios não são considerados na solução do sistema de equações, uma vez que as condições de contorno para pressão já estão embutidas nas equações para os pontos da fronteira. Os valores da pressão e da densidade nos pontos fictícios, entretanto, são necessários para o cálculo de outras funções. Neste caso, os valores das pressões e das densidades nos pontos fictícios são determinados por meio da extrapolação de ordem zero, conforme Fig. 3.4.4. O ponto fictício é empregado apenas por conveniência pois a extrapolação é na realidade realizada para obter-se a pressão na parede.

$$\Phi_P = \Phi_S$$

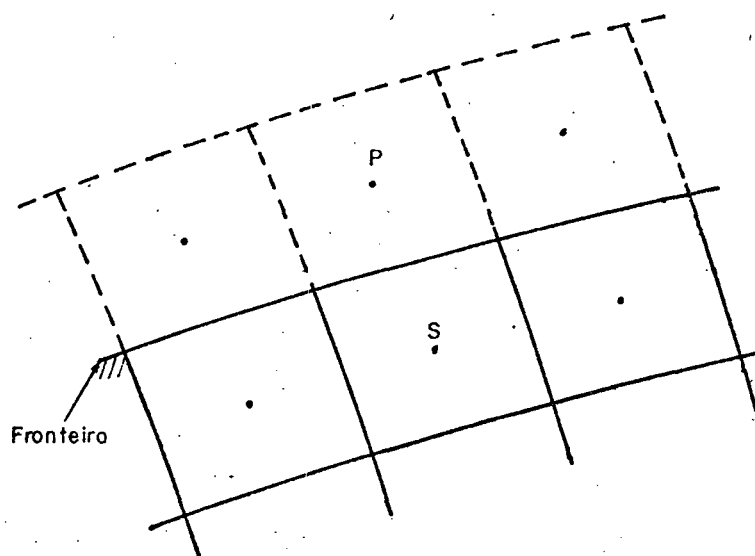


Fig. 3.4.4 - Condição de contorno para pressão e densidade.

3.5 APLICAÇÃO DO MODELO DE TURBULÊNCIA

Como o armazenamento das variáveis é co-localizado, e devido à necessidade do uso das velocidades cartesianas para o seu cálculo, a viscosidade turbulenta foi calculada e armazenada no centro dos volumes de controle conforme as demais variáveis primitivas.

Para chegar ao valor da viscosidade turbulenta, foram feitos vários cálculos complementares, sendo que alguns merecem ser comentados.

3.5.1 CÁLCULO DA VORTICIDADE ($|\vec{\omega}|$)

Em duas dimensões, o vetor vorticidade é definido como

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3, \text{ onde} \quad (3.5.1)$$

\vec{e}_3 é o vetor unitário perpendicular ao plano coordenado $x_1 x_2$ e, portanto, o módulo do vetor vorticidade é

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}} = \sqrt{\left[\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^2} \quad (3.5.2)$$

que em coordenadas generalizadas fica

$$|\vec{\omega}| = J \sqrt{\left[\frac{\partial v}{\partial \xi} x_{2\eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} x_{2\xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} x_{1\eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} x_{1\xi} \right]^2} \quad (3.5.3)$$

usando diferenças centrais para avaliar as derivadas, tem-se

$$|\vec{\omega}| = J_P \sqrt{\left[\frac{v_E - v_W}{2\Delta\xi} x_{2\eta P} - \frac{v_N - v_S}{2\Delta\eta} x_{2\xi P} + \frac{u_E - u_W}{2\Delta\xi} x_{1\eta P} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta\eta} x_{1\xi P} \right]^2} \quad (3.5.4)$$

O posicionamento das variáveis pode ser visto na Fig. 3.3.1.

3.5.2 CÁLCULO DA DISTÂNCIA NORMAL (y)

A distância normal (y) é a distância do centro do volume de controle à superfície sólida.

A sequência de cálculo a seguir é para malhas cujas linhas ξ são aproximadamente normais à superfície de contorno.

Seja o ponto P, o local onde se quer determinar a distância em relação à superfície S com os pontos A e B conhecidos, conforme Fig. 3.5.1. Por meio da trigonometria obtemos

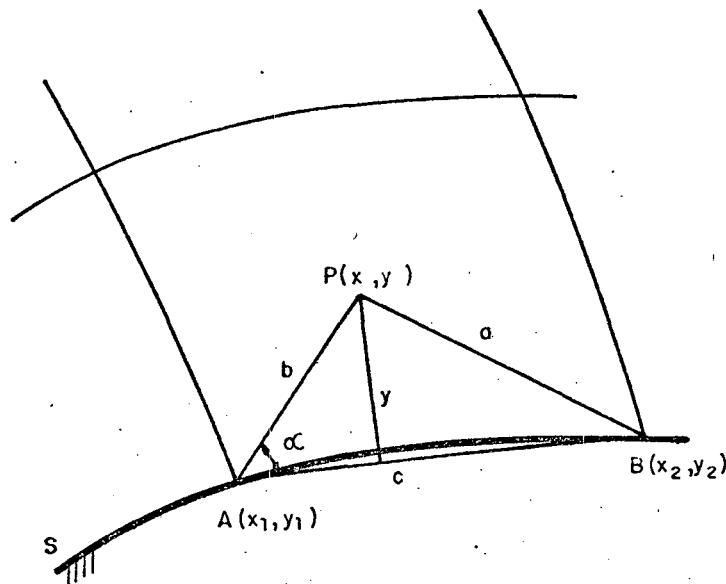


Fig. 3.5.1 - Distância normal (y).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

$$y = b \cdot \operatorname{sen} \alpha = b \cdot \operatorname{sen} \left[\arccos \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \right], \text{ onde}$$

$$a^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (3.5.5)$$

$$b^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

3.5.3 CÁLCULO DA TENSÃO CISALHANTE NA PAREDE (\mathcal{T}_w)

A tensão cisalhante na parede é dada por

$$\mathcal{T}_w = \mu_w \frac{\partial \vec{V}_{tg}}{\partial \vec{n}} \quad (3.5.6)$$

Para superfícies com inclinação positiva, conforme mostrado na Fig. 3.5.2, a sua velocidade tangencial é calculada da seguinte forma

$$V_{tg} = u \cos \beta - v \operatorname{sen} \beta, \text{ onde} \quad (3.5.7)$$

$$\cos \beta = \frac{x_{1\xi P}}{\sqrt{\gamma_P}} \quad \text{e} \quad \gamma = x_{1\xi P}^2 + x_{2\xi P}^2 \quad (3.5.8)$$

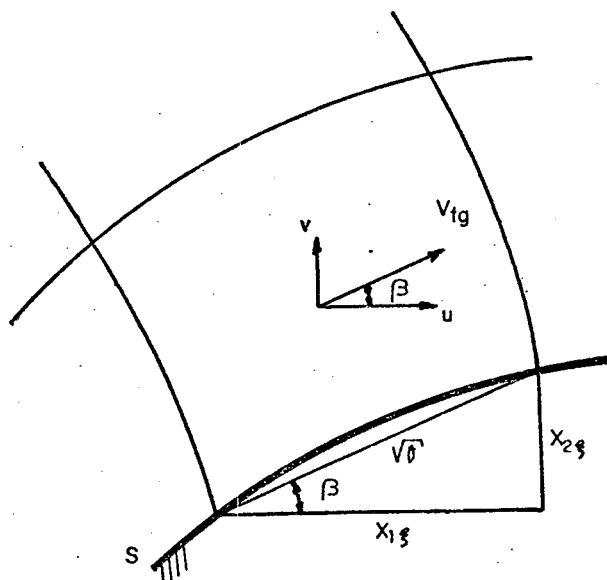


Fig. 3.5.2 - Velocidade tangencial para parede com inclinação positiva

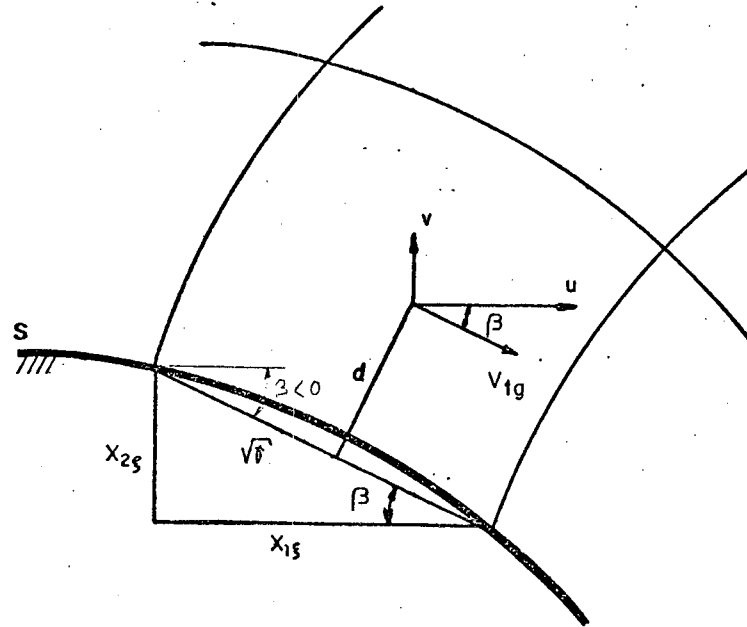


Fig 3.5.3 - Velocidade tangencial para parede com inclinação negativa.

Para superfícies com inclinação negativa, mostrada na Fig. 3.5.3, a sua velocidade tangencial é dada por :

$$V_{tg} = u \cos \beta - v \sin \beta, \text{ onde} \quad (3.5.9)$$

$$\cos \beta = \frac{x_{1\xi P}}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{e} \quad \gamma = x_{1\xi}^2 + x_{2\xi}^2 \quad (3.5.10)$$

Assim, a tensão cisalhante fica

$$\tau_w = \mu_w \frac{V_{tg}}{d}, \text{ onde} \quad (3.5.11)$$

μ_w é a viscosidade molecular do primeiro volume a partir da parede, para o caso adiabático, e calculada em função da temperatura da parede, para o caso de parede com temperatura prescrita, usando a lei de Sutherland [33]. d é a distância do V_{tg} (calculada no primeiro volume) da parede. Nessa posição, a viscosidade turbulenta é bem inferior a viscosidade laminar, aproximadamente 100 vezes menor.

3.6 INTERPOLAÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSPORTE DIFUSIVOS

Como os coeficientes difusivos são variáveis, há a necessidade de avaliar esses valores nas faces. Isto é feito através da média harmônica, tendo os coeficientes difusivos dispostos conforme mostrado na Fig. 3.6.1 [2].

- Para a direção ξ ,

$$[\mu + \mu_t]_e = [\mu_e]_e = \left[\frac{f_e}{[\mu_e]_P} + \frac{1 - f_e}{[\mu_e]_E} \right]^{-1} e \quad (3.6.1)$$

$$\left[\frac{k}{C} \right]_{Pe} = \left[\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right]_e = \left[\frac{\frac{f_e}{[\mu_e]_P} + \frac{1 - f_e}{[\mu_e]_E}}{\left[\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right]_P} + \frac{\frac{f_e}{[\mu_e]_P} + \frac{1 - f_e}{[\mu_e]_E}}{\left[\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right]_E} \right]^{-1} \quad (3.6.2)$$

onde,

$$f_e = \frac{x_{\xi P}}{(x_{\xi P} + x_{\xi E})} \quad (3.6.3)$$

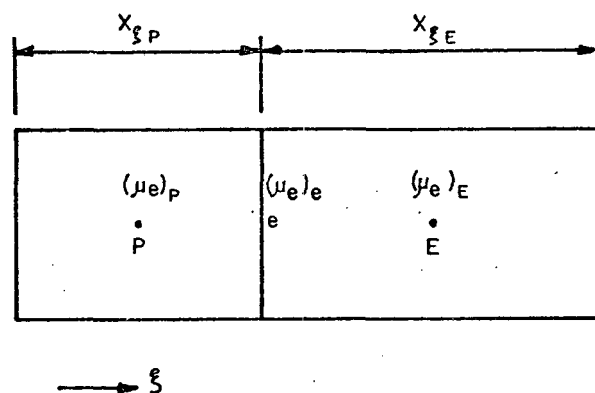


Fig. 3.6.1 - Interpolação na direção ξ .

Localização dos coeficientes difusivos.

Na direção η , a avaliação é feita de forma semelhante.

3.7 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Nesta secção, os principais passos do ciclo iterativo do procedimento de solução do código computacional serão apresentados. O princípio dessa seqüência de cálculos, baseado no método SIMPLEC [32], é a seguinte :

- a) Estimar os campos u, v, T e P^*
- b) A partir dos campos de temperatura e de pressão estimados, calcular os campos de densidade e viscosidade molecular.
- c) Calcular os coeficientes e os termos fontes das equações de quantidade de movimento.
- d) Resolver as equações de quantidade de movimento, obtendo u^* e v^* .
- e) Calcular as velocidades contravariantes U^* e V^* .
- f) Resolver a equação para a pressão P' .
- g) Corrigir os campos de pressão e de densidade.
- h) Corrigir as velocidades cartesianas e contravariantes em função do novo campo de pressão.
- i) Calcular a viscosidade turbulenta.
- j) Resolver a equação de energia.
- h) Com os novos campos de u, v, T, P, ρ e μ_e , voltar ao item a) com o acréscimo no tempo de Δt e iterar até a convergência.

A seqüência completa de cálculo de a) a j) é tratada como uma iteração.

Dentro dessa iteração podem ocorrer vários outros ciclos iterativos, mas no presente trabalho, esse fato não ocorre, com exceção do caso do escoamento laminar incompressível sobre a placa plana, onde a seqüência c) a h) é executada duas vezes.

Como pode ser observado na seqüência de cálculo apresentada, a viscosidade turbulenta entra na primeira iteração somente na avaliação do campo de temperatura. Isto foi feito devido ao fato de que na primeira iteração, como os campos de velocidade são arbitrariamente escolhidos, o cálculo da viscosidade turbulenta fica muito distorcido, gerando valores incoerentes que podem ocasionar divergência.

3.8 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

O critério de convergência empregado compara a maior taxa de variação de um campo da variável escolhida com um valor predeterminado. A variável comparada no presente trabalho é a componente u , por se tratar de uma grandeza que melhor define os escoamentos resolvidos. Dessa forma, define-se o resíduo de convergência como o valor máximo da taxa de variação do campo da componente cartesiana u .

$$\text{Resíduo de convergência} = \text{máximo de } \left\{ \frac{u_i(t+\Delta t) - u_i(t)}{u_i(t+\Delta t)} \right\} \quad (3.8.1)$$

onde " i " varia de forma que todos os pontos do domínio computacional sejam considerados.

O resíduo de convergência empregado é de 10^{-6} . Portanto, uma solução é dita como convergida quando a maior variação relativa da componente cartesiana u em todo o domínio computacional for menor do que este resíduo.

4 - TESTES PRELIMINARES

O arranjo co-localizado das variáveis para escoamentos compressíveis ainda está em fase de pesquisa, com a maioria dos resultados publicados obtidos da solução das equações de Euler. Portanto, antes de introduzir termos adicionais de dissipação viscosa e modelo de turbulência nas equações, foram feitos alguns testes para a validação do código computacional usando as equações de Navier-Stokes. Nessa fase de testes preliminares, os problemas resolvidos foram os de regime laminar.

Os testes foram realizados de forma que à medida que as soluções iam apresentando bons resultados, comparados com os valores analíticos, novas implementações eram adicionadas ao programa até completar-se com o modelo de turbulência.

Visando problemas que possuem dados suficientes para comparações, os problemas escolhidos estão relacionados a escoamentos sobre placa plana.

4.1 PLACA PLANA - SOLUÇÃO LAMINAR INCOMPRESSÍVEL

Este primeiro teste tem o objetivo de validar o código computacional MACH2D [32] desenvolvido no SINMEC na solução de problemas de escoamentos sobre placa plana usando as equações de Navier-Stokes.

Apesar do problema ser incompressível, o teste foi feito usando a

formulação compressível/incompressível com a equação de energia acoplada. Para isto foi usado número de Mach bastante baixo, simulando o limite incompressível do modelo. Os dados do problema são apresentados abaixo :

Número de Mach = 0,06	$U_{IN} = 19,69 \text{ m/s}$
$T_{IN} = 268 \text{ K}$	$\rho_{IN} = 1,32 \text{ kg/m}^3$
$R_{ar} = 287 \text{ J/kgK}$	$\gamma = 1,4$
$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$	$L = 0,2 \text{ m}$
$RE_L = 295350$	$\Delta t = 0,91422 \times 10^{-5}$
$Pr = 0,72$	$U_{som} = 331,20 \text{ m/s}$

A malha utilizada foi de 100×40 volumes igualmente espaçada em ambas as direções, com $\Delta x = 0,002 \text{ m}$ e $\Delta y = 0,5 \times 10^{-4} \text{ m}$, originando uma altura total de 2 mm. Uma parte da malha pode ser vista na Fig. 4.1.1, cujo objetivo é mostrar a relação entre os valores de Δx e Δy .

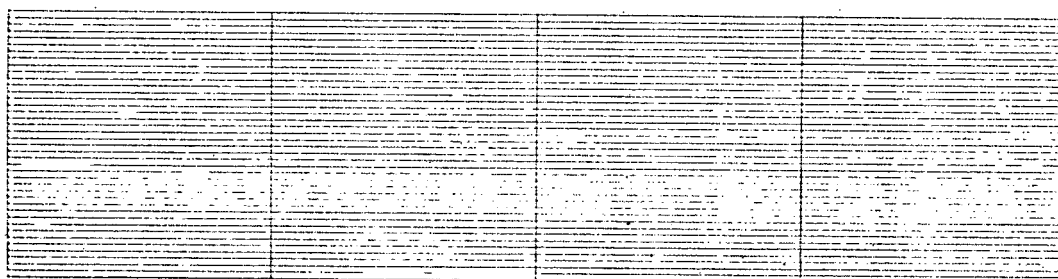


Fig. 4.1.1 - Vista parcial da malha

As condições utilizadas na inicialização do problema foram as da corrente livre, ou seja, um campo uniforme de variáveis definido em todo o domínio. A solução é obtida através de um transiente distorcido.

As condições de contorno usadas podem ser vistas na Fig. 4.1.2.

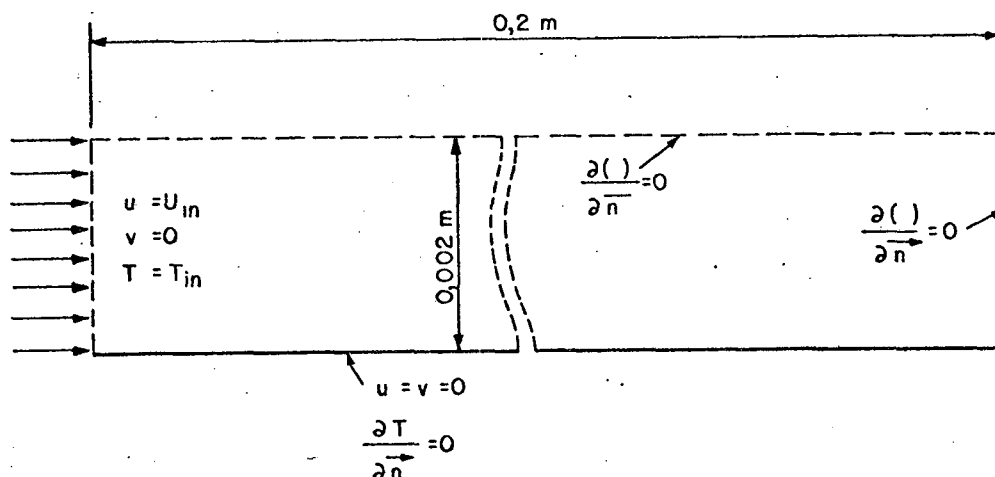


Fig. 4.1.2 - Domínio computacional com as condições de contorno.

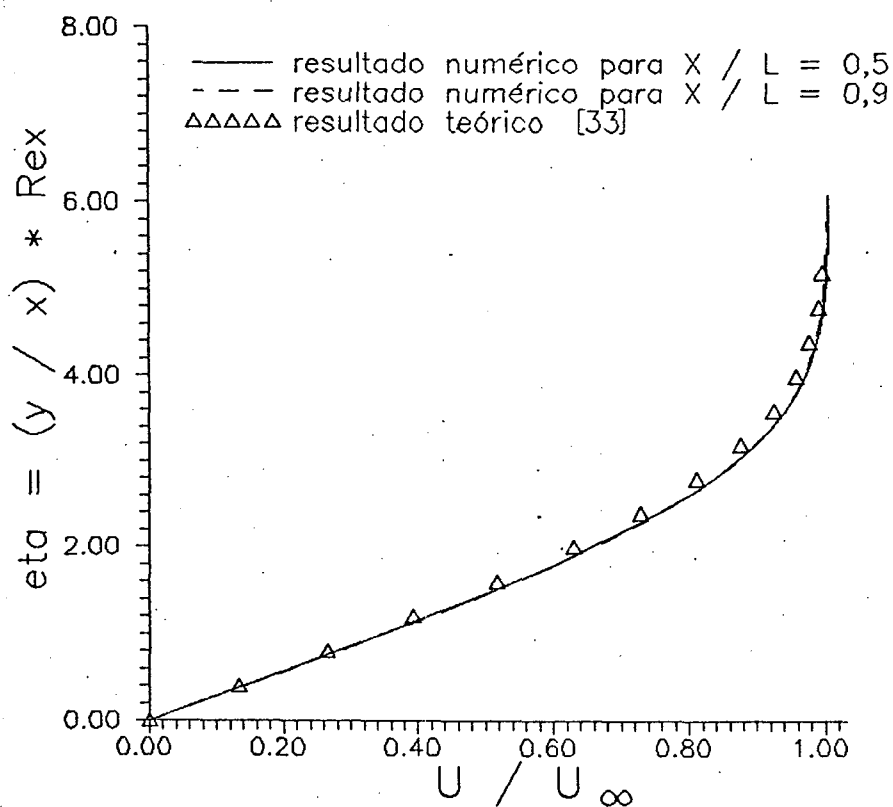


Fig. 4.1.3 - Escoamento laminar sobre placa plana.
Perfil de velocidade.

Para verificar a exatidão da solução, foram comparados os perfis de velocidade em duas posições ($x / L = 0,5$ e $x / L = 0,9$) e o coeficiente de atrito, definido conforme a Eq. 4.1.1, ao longo da placa, com os valores teóricos obtidos da solução por similaridade [33]. Os números de volumes de controle dentro da camada limite para as posições $x / L = 0,5$ e $x / L = 0,9$ são de 25 e 33, respectivamente. As comparações podem ser vistas nas Fig. 4.1.3 e 4.1.4 para a velocidade e o coeficiente de atrito, respectivamente.

$$C_f = \frac{2 \tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad (4.1.1)$$

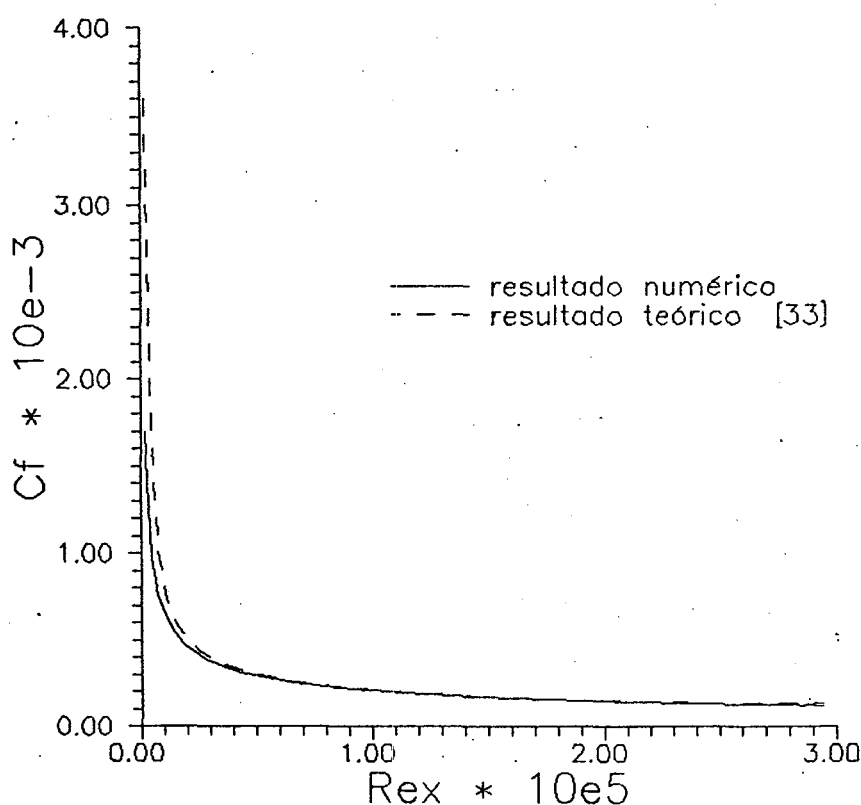


Fig. 4.1.4 - Escoamento laminar incompressível sobre placa plana. Coeficiente de atrito.

Como pode ser verificado, o resultado é suficientemente bom, com as velocidades assumindo um perfil praticamente único, conforme o esperado e de acordo com a adimensionalização empregada. O coeficiente de atrito também apresentou uma boa concordância apesar da discrepância na região de entrada. Essa diferença pode ser atribuída ao fato de que na região da

borda de ataque ocorrem as maiores mudanças do escoamento, e com isso, devido a sua uniformidade, a malha utilizada não é bastante refinada para captar bem essas mudanças.

Portanto, as diferenças na região de entrada podem ser diminuídas através de um refino maior da malha nessa região, mas o resultado foi considerado bom para efeitos de avaliação do modelo.

Além disso, foram verificados também os campos de temperatura, de pressão e de densidade que permaneceram uniformes e iguais aos da corrente livre, conforme o esperado, comprovando a eficiência da metodologia compressível/incompressível.

4.2 - PLACA PLANA ISOTÉRMICA - SOLUÇÃO LAMINAR COMPRESSÍVEL

Na sequência natural de aumentar a complexidade dos problemas, foi resolvido o problema da placa plana isotérmica com escoamento laminar compressível. Neste caso, a viscosidade foi feita variável com a temperatura de acordo com a expressão dada pela Eq. 2.3.2 com " w " = 1.

Os números de Mach utilizados variam de 2 a 4, os quais representam velocidades bastante elevadas. Para que a solução continuasse laminar, diminuiu-se o valor da densidade de modo a manter o número de Reynolds na ordem de $3,76 \times 10^5$. Isso não está fora da realidade física, uma vez que em altitudes muito elevadas, a pressão e, em consequência, a densidade são de valores muito pequenos. Por exemplo, na altitude de 30 km, a massa específica do ar é da ordem de $0,018 \text{ kg/m}^3$, enquanto que os valores utilizados variam entre 0,025 a $0,05 \text{ kg/m}^3$.

Os demais dados do problema são :

Número de Mach = 2 a 4

$U_{IN} = f(\text{Número de Mach})$

$T_{IN} = 273 \text{ K}$

$\rho_{IN} = f(\text{Número de Mach})$

$R_{ar} = 287 \text{ J/kgK}$

$\gamma = 1,4$

$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$

$L = 0,2 \text{ m}$

$RE_L \approx 3,76 \times 10^5$

$\Delta t = f(\text{Número de Mach})$

$Pr = 0,70$

$U_{som} = 331,20 \text{ m/s}$

A malha utilizada é de 100×40 volumes igualmente espaçados em ambas as direções, onde $\Delta x = 0,002$ m. Para número de Mach = 2, $\Delta y = 0,1 \times 10^{-3}$ m, e para número de Mach = 3 e 4, $\Delta y = 0,2 \times 10^{-3}$ m. E a dimensão vertical do domínio computacional é de 4 e 8 mm, respectivamente. Uma vista parcial da malha e o domínio computacional podem ser vistos nas Figs. 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente.

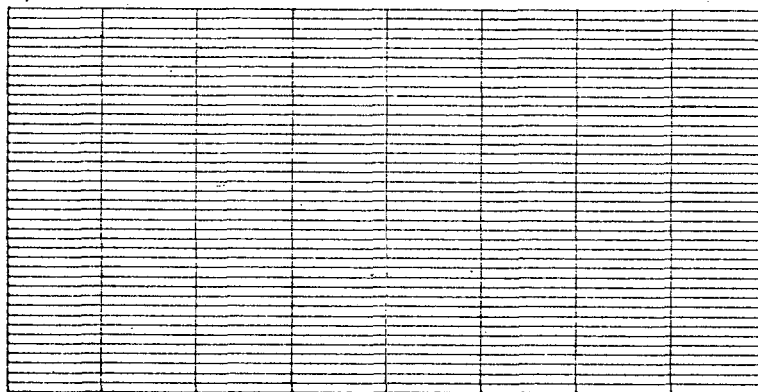


Fig. 4.2.1 - Vista parcial da malha.

As condições iniciais utilizadas são as da corrente livre e as condições de contorno usadas podem ser vistas na figura 4.2.2.

Para efeito de verificação foram comparados os perfis de velocidade e de temperatura com os resultados da solução analítica dada em [38].

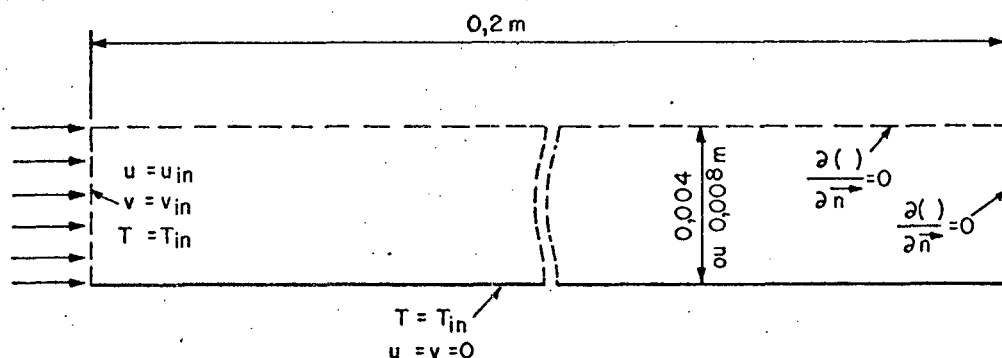


Fig. 4.2.2 - Domínio computacional com as condições de contorno.

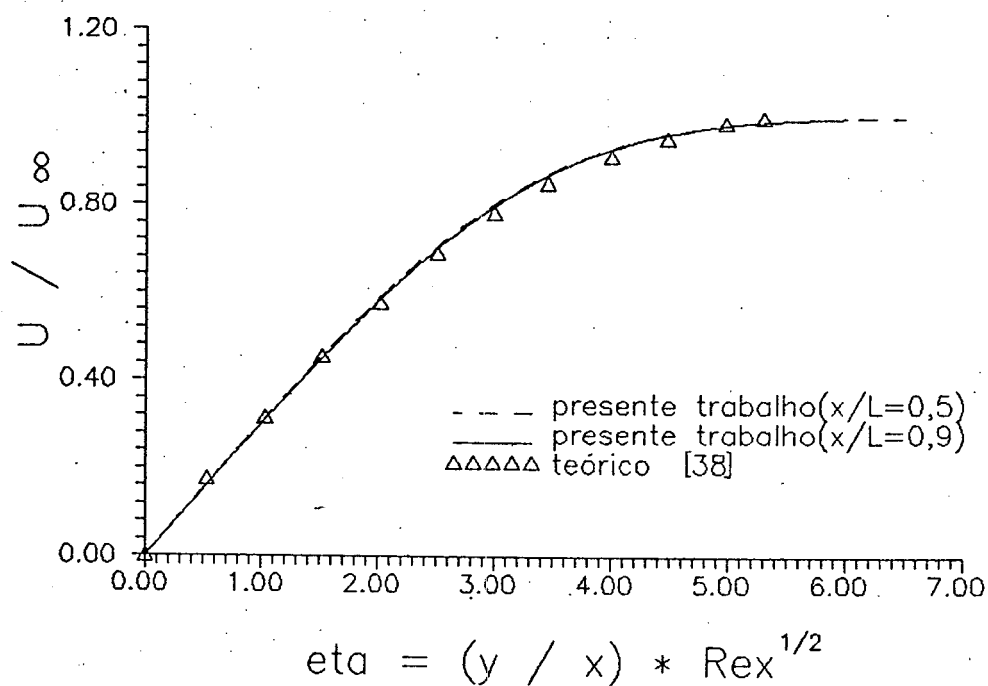


Fig. 4.2.3 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 2$.

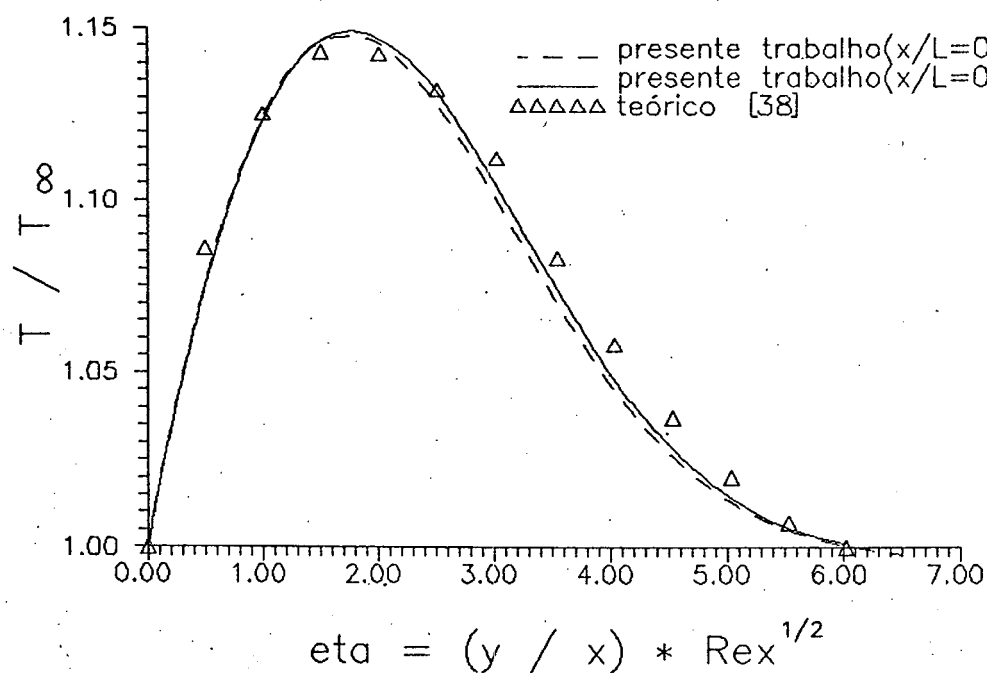


Fig. 4.2.4 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 2$.

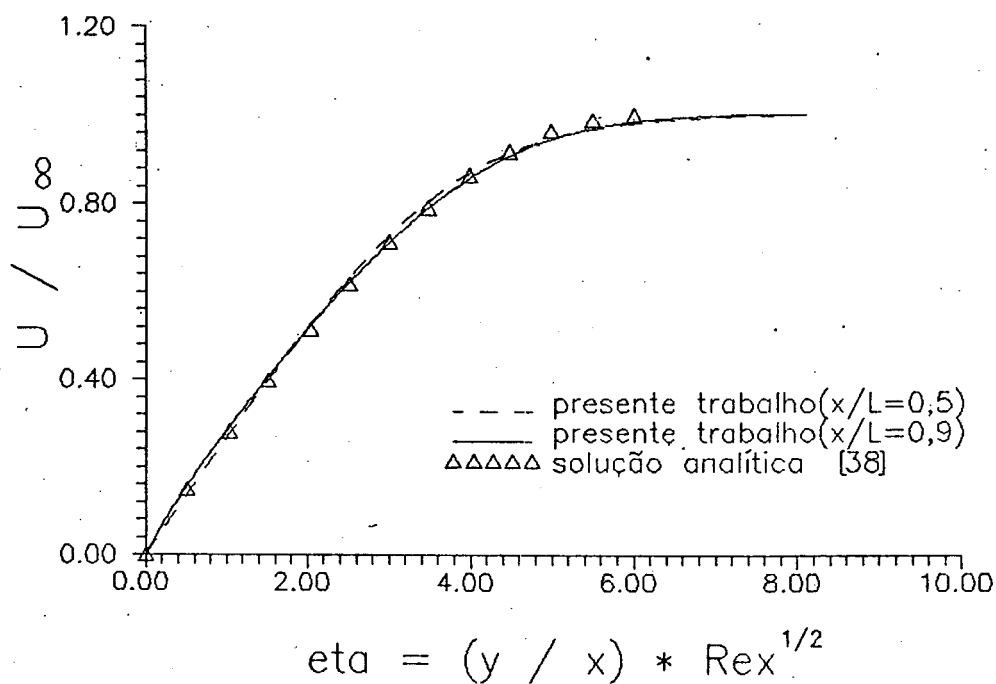


Fig. 4.2.5 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 3$.

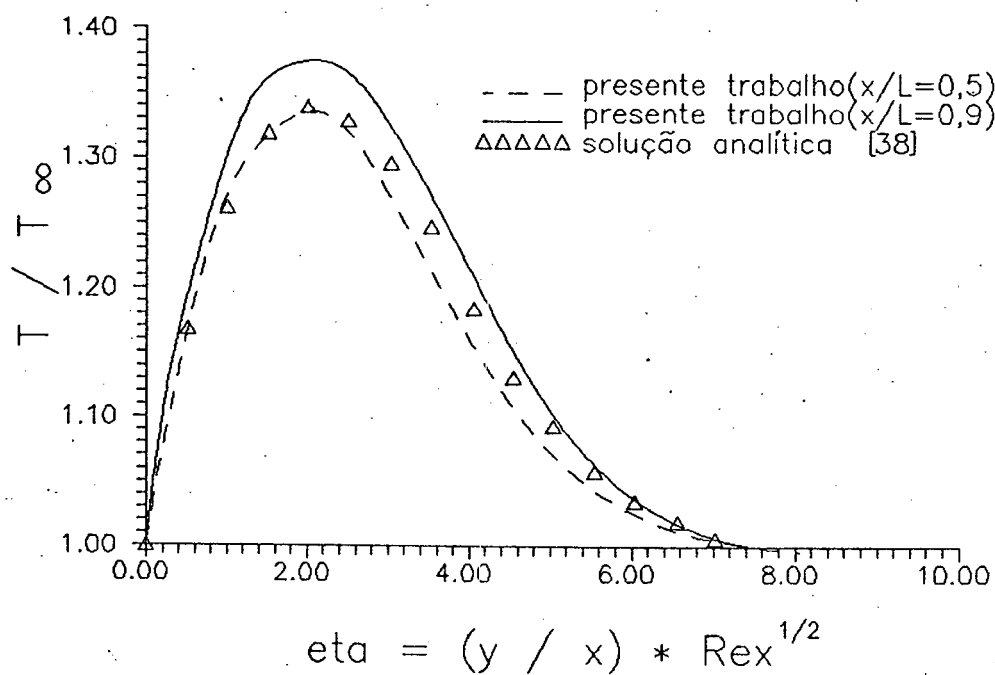


Fig. 4.2.6 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 3$.

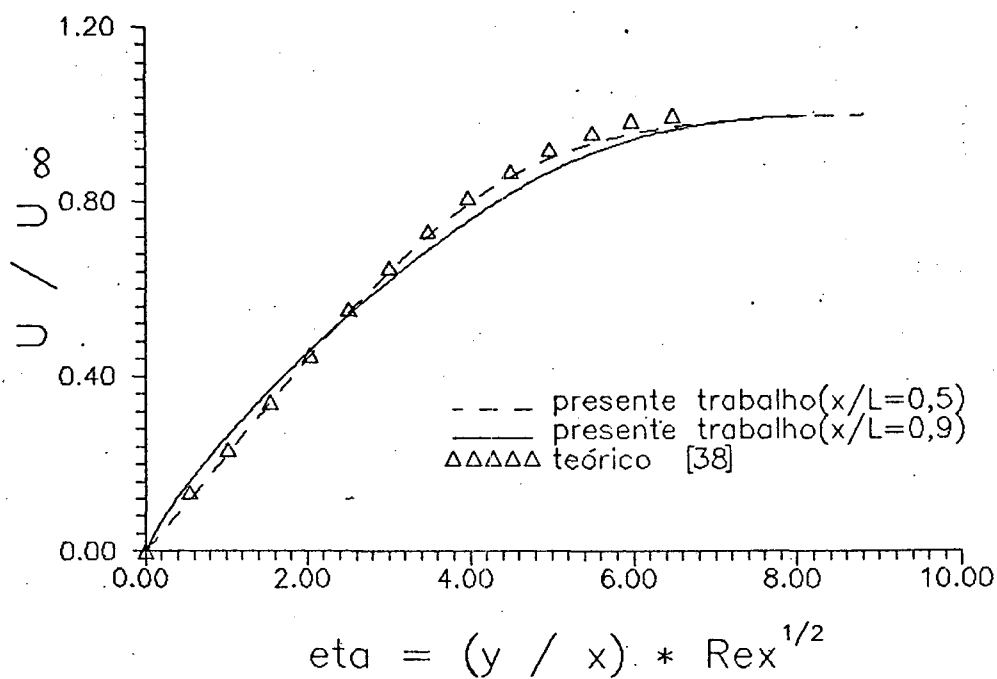


Fig. 4.2.7 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de velocidade. $Ma = 4$.

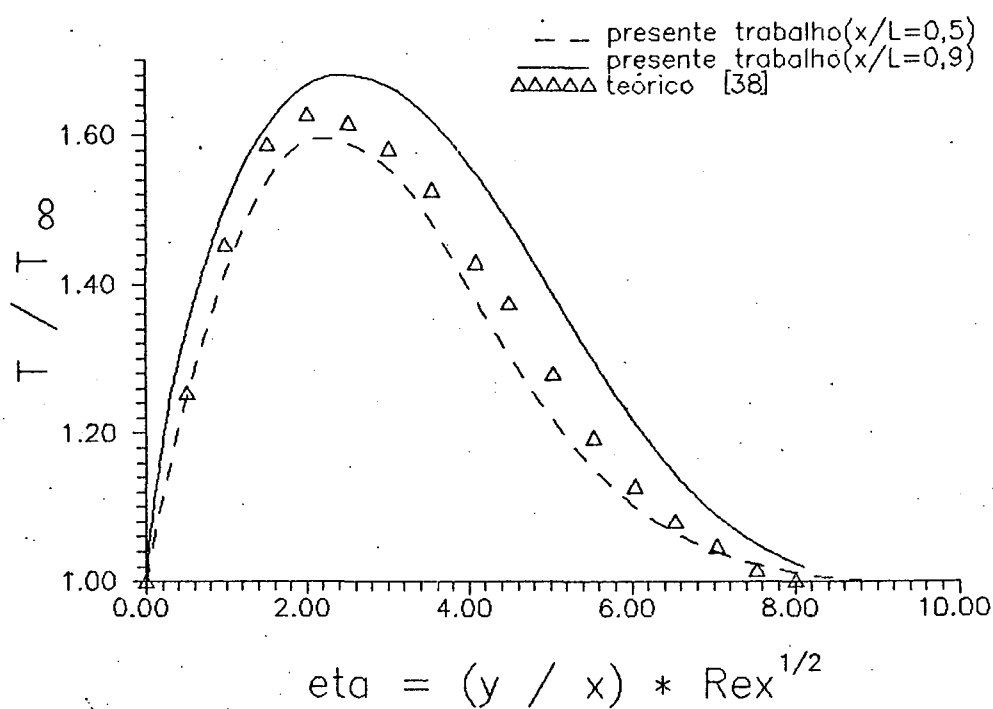


Fig. 4.2.8 - Escoamento laminar compressível sobre placa plana isotérmica. Perfis de temperatura. $Ma = 4$.

As posições dos perfis da solução numérica escolhidos para as comparações foram $X / L = 0,53$ e $X / L = 0.90$. As comparações podem ser vistas para Mach 2, nas Figs. 4.2.3 e 4.2.4, para Mach 3, nas Figs. 4.2.5 e 4.2.6 e para Mach 4, nas Figs. 4.2.7 e 4.2.8.

Conforme pode-se ver nas figuras, os resultados numéricos apresentam uma boa concordância nos perfis de velocidade para Mach 2 e 3. Para Mach 4 os resultados já começam a apresentar diferenças consideráveis. O mesmo acontece para os perfis de temperatura, onde a melhor concordância fica para Mach 2, e a pior fica para Mach 4.

Os resultados na sua totalidade, apresentam o comportamento físico esperado e coerente, apesar das discrepâncias apontadas acima. O próximo capítulo apresenta resultados obtidos empregando o modelo de turbulência.

5 - RESULTADOS

No capítulo anterior, foram resolvidos problemas empregando-se as equações de Navier-Stokes e de energia, considerando-se os termos de dissipação viscosa e viscosidade variável. Neste capítulo, os escoamentos simulados são turbulentos. Três tipos de escoamentos, cujos resultados experimentais são disponíveis foram resolvidos. São eles : escoamento sobre placa plana adiabática ; sobre placa plana isotérmica; e sobre rampa adiabática.

Para concluir o trabalho, o escoamento supersônico turbulento sobre o VLS (veículo lançador de satélites) é também simulado. O VLS trata-se do veículo que está sendo desenvolvido dentro da Missão Espacial Completa Brasileira e será o lançador do primeiro satélite brasileiro de investigação científica a ser colocado em órbita. A possibilidade de se prever o aumento de temperatura da superfície do foguete causado pelo aquecimento cinético, levando-se em conta as equações de Navier-Stokes, foi a motivação principal deste trabalho. O conhecimento da temperatura da superfície do foguete permite determinar a temperatura no interior do foguete.

5.1 PLACA PLANA TURBULENTA ADIABÁTICA

Por ser este o primeiro teste, foi o que mostrou a maioria dos

problemas quanto a aplicação do modelo de turbulência.

Como o resultado da solução laminar apresentava bons resultados, optou-se, inicialmente, por usar o mesmo tipo de malha, ou seja, malha uniformemente espaçadas. Isso gerava o problema de não convergência, ou melhor, o resíduo, definido conforme a Eq. 3.8.1, oscilava em torno de um valor da ordem de 10^{-1} .

Os fatores prováveis para este comportamento são dois. Ou o domínio da malha, que variou de 0,5 mm a 20 mm de altura, não era o suficiente para as condições de contorno adotadas, ou a malha não captava bem a camada limite, importante para a avaliação da viscosidade turbulenta.

O tipo seguinte de malha utilizado foi a que apresentava uma variação em progressão aritmética na direção normal à superfície e problemas semelhantes a situação anteriores foram verificados.

O terceiro tipo de malha utilizado foi a malha com espaçamento em progressão geométrica, que conseguiu avaliar melhor a camada limite e ao mesmo tempo aumentar bastante o domínio do escoamento com o mesmo número de volume de controle das situações anteriores. Esse tipo de malha é suficientemente bom para obter a convergência, mas preferiu-se continuar à procura de outro tipo, que seja mais simples de manusear e que apresente maior número de volumes dentro da camada limite.

Finalmente, o tipo de malha julgado mais adequado para resolver o problema foi a malha com o espaçamento exponencial na direção normal à superfície. Nessa malha, ampliou-se o domínio suficientemente para a aplicação das condições de contorno desejado e ao mesmo tempo captou-se melhor a camada limite.

O problema quanto a captação da camada limite refere-se a necessidade de se ter uma certa quantidade de volumes de controle dentro dela. Pois, é a partir das funções calculadas dentro da camada limite é que são definidas os valores da viscosidade turbulenta.

Portanto, a malha é o principal fator para a convergência. E um detalhe importante da malha refere-se ao valor do y_*^+ , valor de y^+ do volume mais próximo da superfície, que, conforme sugere no artigo de Baldwin e Lomax [20], deve ser menor que 2,0. Acredita-se que isso é requerido para que se consiga uma adequada avaliação das funções usadas no modelo de turbulência. Em muitas vezes usou-se o valor de y_*^+ muito maior que 2,0 e em todos os casos não se conseguiu obter a convergência, pois, sem essa condição, a viscosidade turbulenta varia bruscamente duas iterações, devido a instabilidade das funções que fazem a sua avaliação.

Outro fato interessante refere-se a região próximo ao bordo de ataque, que dificulta ou impossibilita a convergência quando as malhas usadas nessa região forem muito refinadas na direção x. Este fato foi verificado especificamente para os casos das placas planas e rampa. Em muitas das tentativas realizadas para obter a solução do problema, houve a necessidade de não refinar excessivamente a malha na região de entrada para se poder obter a solução convergida. Isto pode ser explicado pelo fato da transição do regime laminar para o turbulento ocorrer bem próximo da borda de ataque, a uns 8 a 15 mm. Devido a esse fenômeno, que gera uma variação brusca no valor da viscosidade turbulenta na região de transição em função do próprio modelo, a viscosidade turbulenta varia bruscamente ao longo da placa e entre as iterações. Assim sendo, não se conseguiu obter solução convergida com o uso de malhas muito refinadas na região de entrada. Ao refinar-se a malha, aparentemente o problema passa a ser melhor captado, dificultando a obtenção da solução.

A equação exponencial utilizada para o espaçamento na direção y é a seguinte :

$$y(i,j) = \exp(j \times 0,24) - 0,9 / \{8 \times \exp[(n-1) \times 0,24]\} \quad (5.1.1)$$

com $j = 1$ a n ,

onde i e j são variáveis inteiras e n é o número de linhas da malha.

Esta expressão foi obtida por meio de tentativas semi-empíricas, procurando-se conseguir o maior número possível de volumes próximos à parede.

A seguir serão apresentados os dados do problema.

$$\text{Número de Mach} = 1,5 \text{ e } 2,85 \quad U_{IN} = 943,91 \text{ e } 496,79 \text{ m/s}$$

$$T_{IN} = 273 \text{ K}$$

$$\rho_{IN} = 1,32 \text{ kg/m}^3$$

$$R_{ar} = 287 \text{ J/kgK}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$$

$$L = 0,4 \text{ m}$$

$$RE_L = 0,149 \times 10^8 \text{ e } 0,282 \times 10^8$$

$$At = 0,64 \times 10^{-6} \text{ e } 0,74 \times 10^{-7} \text{ s}$$

$$Pr = 0,72$$

$$U_{som} = 331,20 \text{ m/s}$$

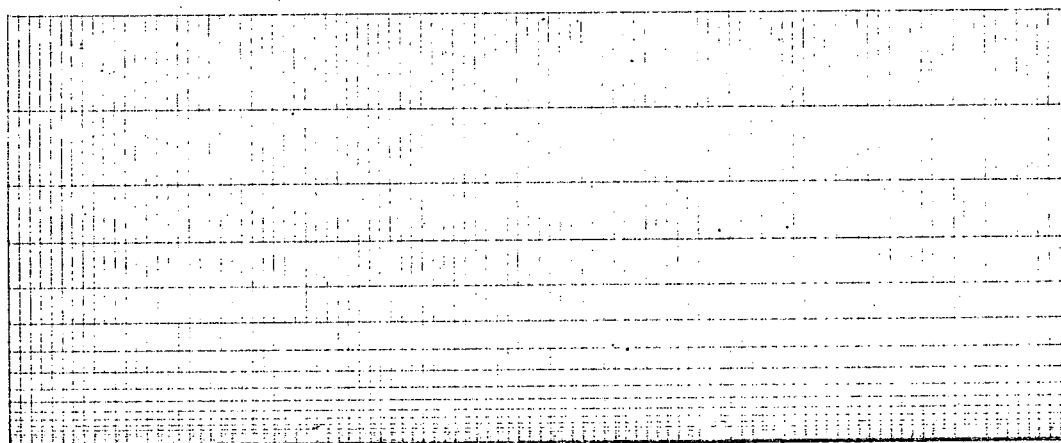


Fig. 5.1.1 - Malha usada nos resultados apresentados.

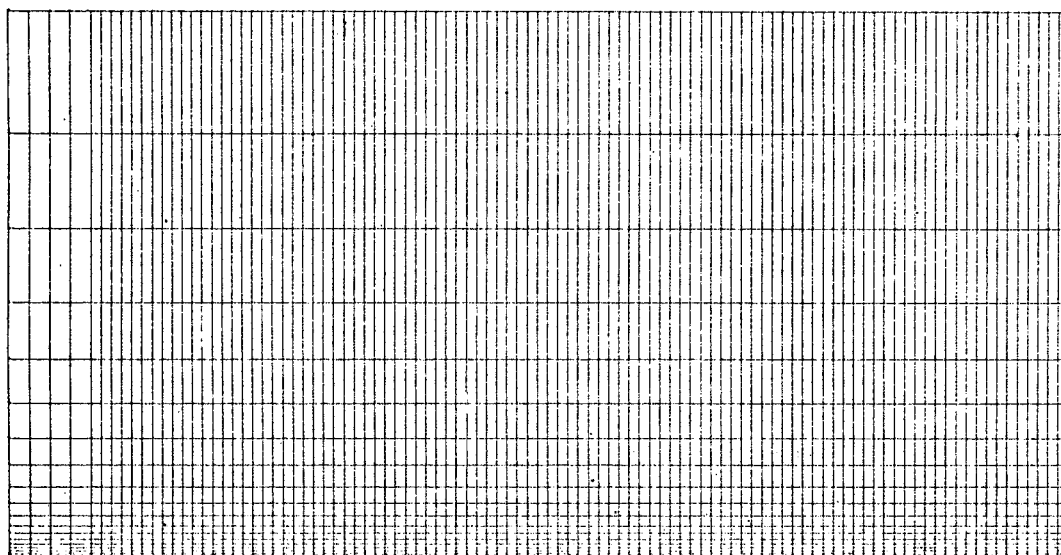


Fig. 5.1.2 - Malha testada, que obteve convergência, com os volumes da região de entrada maiores

A malha utilizada na obtenção dos resultados apresentados a seguir foi de 100×40 igualmente espaçada na direção x e com espaçamento

exponencial na direção normal à da placa, conforme já explicado. O espaçamento na direção x utilizado é de 0,004 m ($\Delta x = 0.004$ m) e na direção normal é em função da equação exponencial dado pela Eq. 5.1.1, gerando uma altura total de 0,1605m, com o primeiro Δy igual a $0,27983 \times 10^{-5}$ m.

Em alguns testes em que usou malha mais refinadas, houve a necessidade de aumentar os espaçamentos na direção x dos primeiros volumes na região da borda de ataque, conforme já mencionado anteriormente. Um exemplo desse tipo de malha pode ser visto na Fig. 5.1.2. Nestes testes, observou-se que é possível obter solução convergida se os primeiros volumes da região de entrada apresentassem espaçamento na direção x maior que 0,003 m e que os espaçamentos dos volumes posteriores são de pouca relevância.

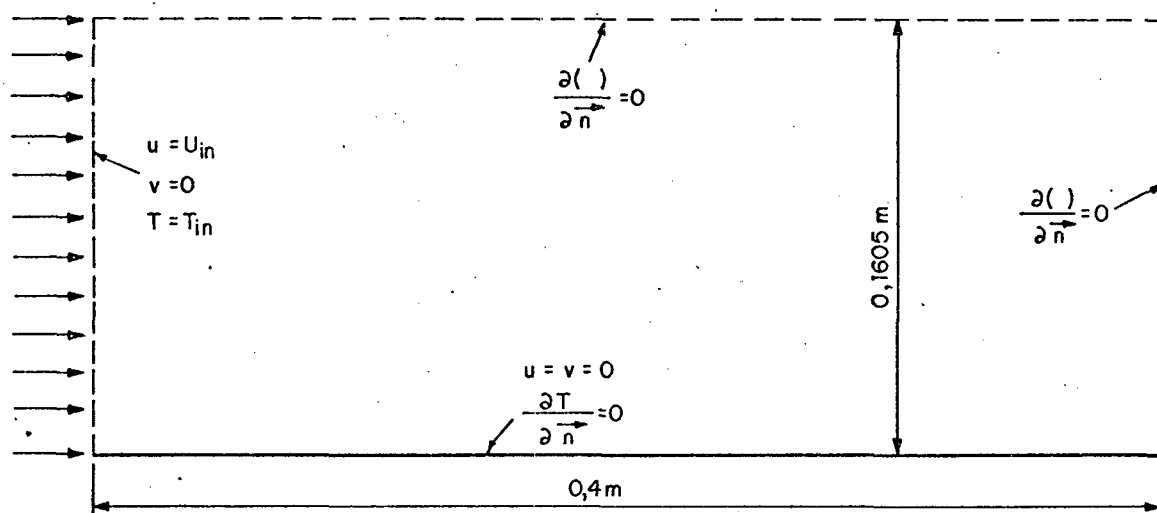


Fig. 5.1.3 - Domínio computacional com as condições de contorno.

As condições iniciais utilizadas foram as da corrente livre e as condições de contorno podem ser vistas na Fig. 5.1.3.

Com essas condições e dados de entrada foram obtidos os resultados numéricos com 1828 iterações para $Ma = 1,5$ e 1659 iterações para $Ma = 2,85$, os quais foram comparados com os valores experimentais [45] apresentados em [20] e numéricos contidos no próprio artigo original de Baldwin e Lomax [20] quanto ao coeficiente de atrito, calculado de acordo com a Eq. 4.1.1, conforme pode ser vistas nas Figs. 5.1.4 e 5.1.5.

Os gráficos mostram que o resultado obtido com a metodologia empregada neste trabalho, para Mach 1,5, apresenta os valores numéricos de coeficiente de atrito mais próximos dos valores experimentais do que aqueles obtidos em [20], enquanto que para Mach 2,85, os valores obtidos estão mais afastados, quando comparados com os de [20].

Para o escoamento com $Ma = 1,5$, conforme a Fig. 5.1.4, tanto na solução do presente trabalho como em [20], pode ser vista uma acentuada queda no valor do coeficiente de atrito até o número de Reynolds da ordem de $4,00 \times 10^5$, ocorrendo posteriormente uma elevação acentuada, o que representa a transição do regime laminar para o turbulento.

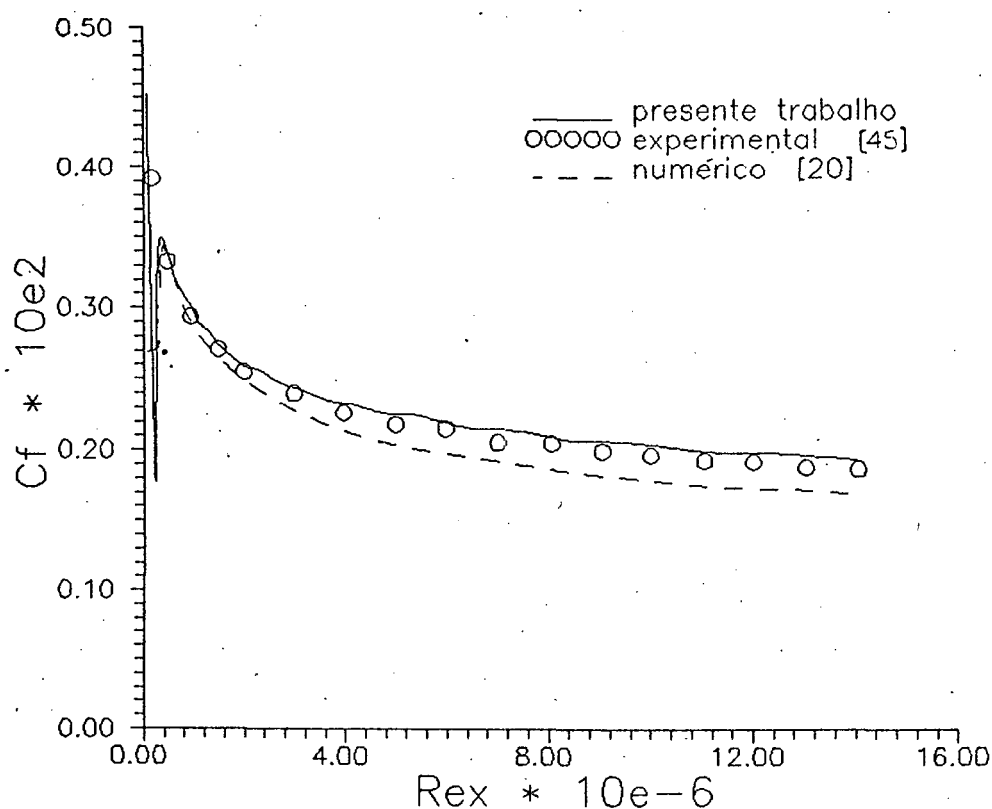


Fig. 5.1.4 - Escoamento supersônico turbulento sobre placa plana.
Coeficiente de atrito. $Ma = 1,5$.

Comportamento semelhante pode ser visto, segundo a Fig. 5.1.5, na solução obtida por [20] para $Ma = 2,85$, porém não foi observado na

curva da solução obtida no presente trabalho. Apesar disso, esse comportamento está presente na solução deste trabalho, mesmo não sendo evidenciado no gráfico, pois, verificando os valores da viscosidade turbulenta, constata-se que estas viscosidades assumem o valor zero na primeira coluna da malha, onde o valor do número de Reynolds é da ordem de $3,5 \times 10^5$ e esse fato, de acordo com o modelo de turbulência, sugere a transição para a turbulência, conforme a Eq. 2.4.9.

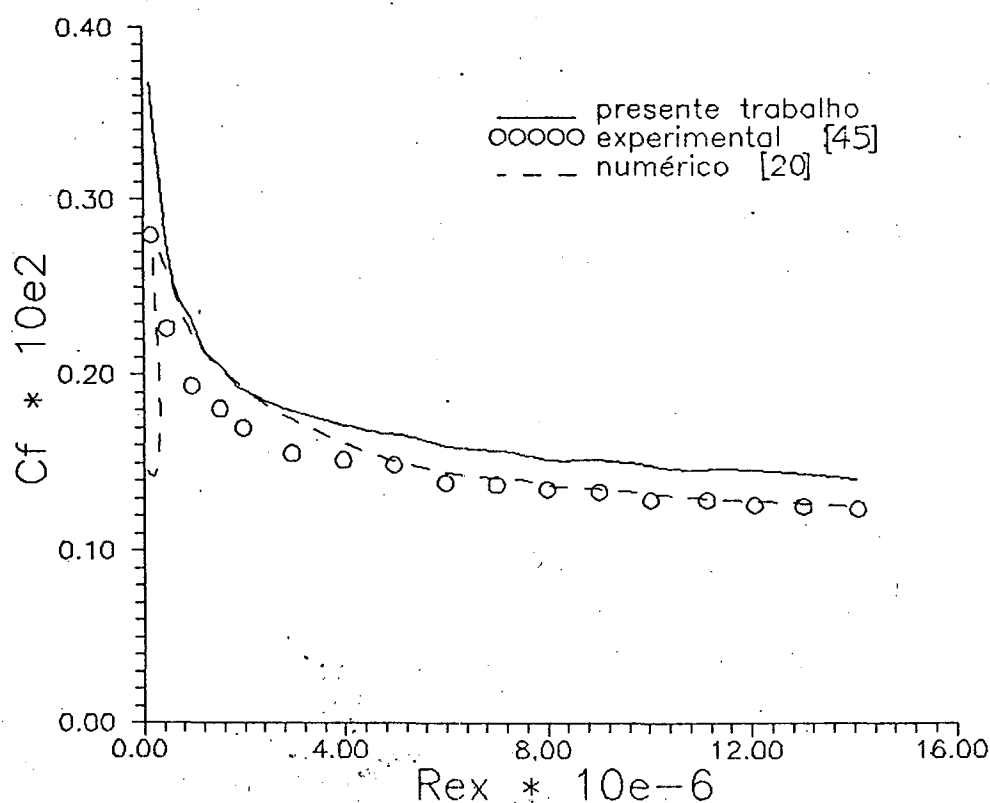


Fig. 5.1.5 - Escoamento supersônico turbulento sobre placa plana.
Coeficiente de atrito. $Ma = 2,85$.

Para se ter uma idéia sobre o comportamento da viscosidade turbulenta, são apresentados na Fig. 5.1.6 dois perfis dessa propriedade para $Ma = 2,85$. Nessa figura, pode ser observado que os perfis para as

duas posições diferentes são bastantes semelhantes, além disso, pode ser visto em destaque os pontos a partir dos quais se adota a viscosidade turbulenta da camada externa do modelo de turbulência.

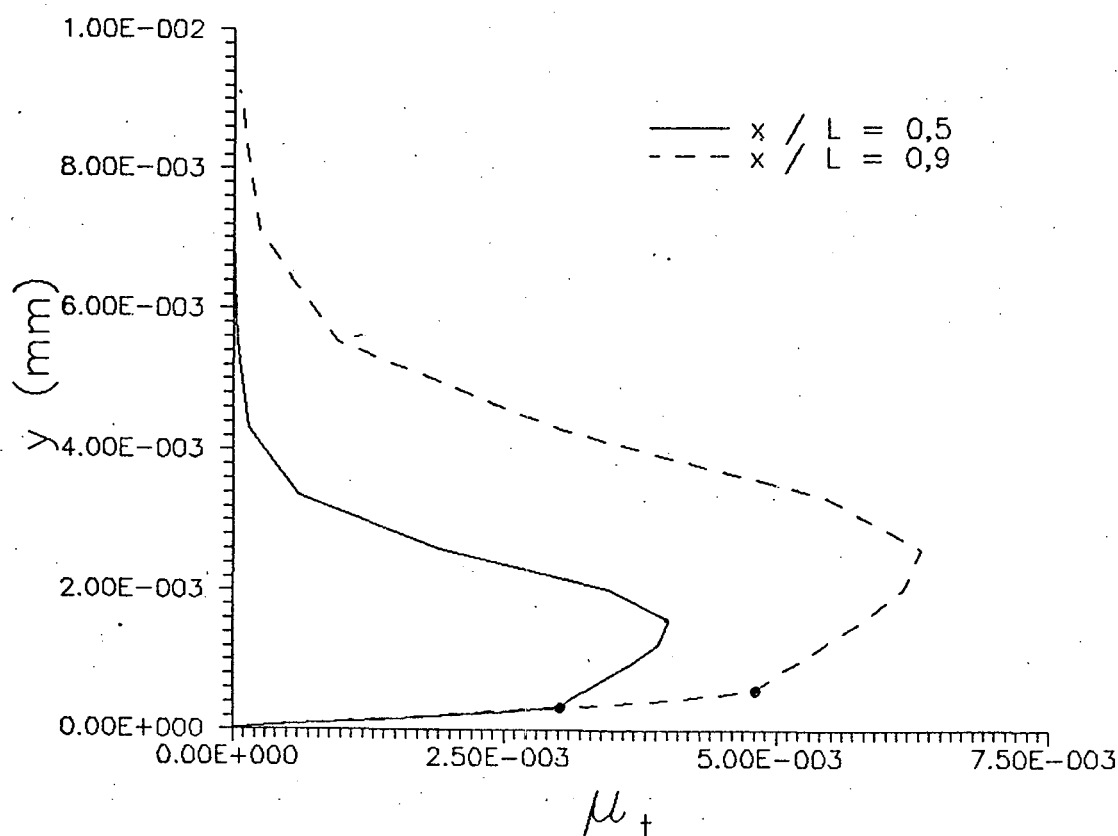


Fig. 5.1.6 - Comportamento da viscosidade turbulenta para escoamento sobre placa plana. $Ma = 2,85$

5.2 PLACA PLANA TURBULENTE ISOTÉRMICA

Neste caso, testou-se dois tipos de malha, com os quais foi possível obter a convergência da solução. Uma das malhas foi um misto de progressão aritmética e geométrica e apresentou resultados quase idêntico ao da malha com espaçamento exponencial, segundo tipo de malha usada.

A malha com progressões aritmética e geométrica foi usada com a finalidade de verificar se é possível melhorar o resultado da solução

usando a malha exponencial, uma vez que este não foi bom, conforme será apresentado mais adiante. Esse tipo de malha utilizado apresenta arranjos com mais de uma progressão geométrica e mostrou que é possível o seu uso na solução de problemas em regime turbulento, no entanto, ele não é considerado prático e o resultado obtido é praticamente igual ao da malha exponencial.

A malha e os resultados apresentados a seguir são referentes à malha com espaçamento exponencial.

Os parâmetros do problema são dados abaixo :

$$\text{MACH} = 2,57$$

$$U_{\text{IN}} = 851,17 \text{ m/s}$$

$$T_{\text{IN}} = 273 \text{ K}$$

$$\rho_{\text{IN}} = 1,32 \text{ kg/m}^3$$

$$R_{\text{ar}} = 287 \text{ J/kgK}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$$

$$L = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{RE}_L = 0,2553 \times 10^8$$

$$\Delta t = 0,58 \times 10^{-6}$$

$$\text{Pr} = 0,72$$

$$U_{\text{som}} = 331,20 \text{ m/s}$$

A malha utilizada foi de 100×40 igualmente espaçada na direção x com Δx igual a $0,004 \text{ m}$ e com espaçamento na direção y em função da equação exponencial semelhante a da Eq. 5.1.1, obtendo uma altura para o domínio computacional de $0,1059 \text{ m}$ e com o seu primeiro espaçamento igual a $0,2663 \times 10^{-5} \text{ m}$, conforme pode ser visto na Fig. 5.2.1.

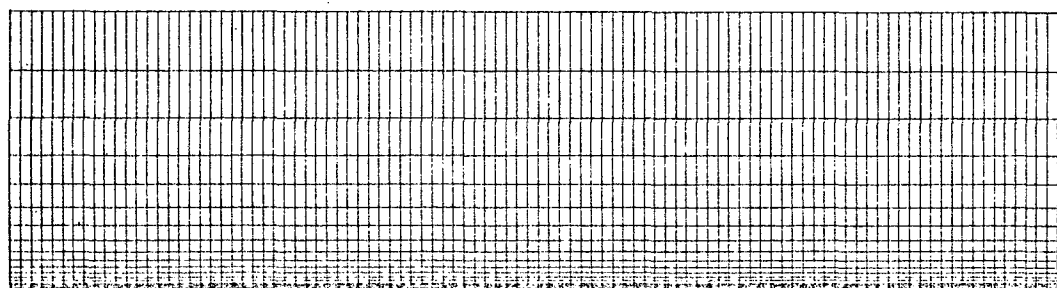


Fig. 5.2.1 - Malha usada nos resultados apresentados.

As condições iniciais utilizadas foram as do corrente livre e as condições de contorno podem ser vistas na Fig. 5.2.2.

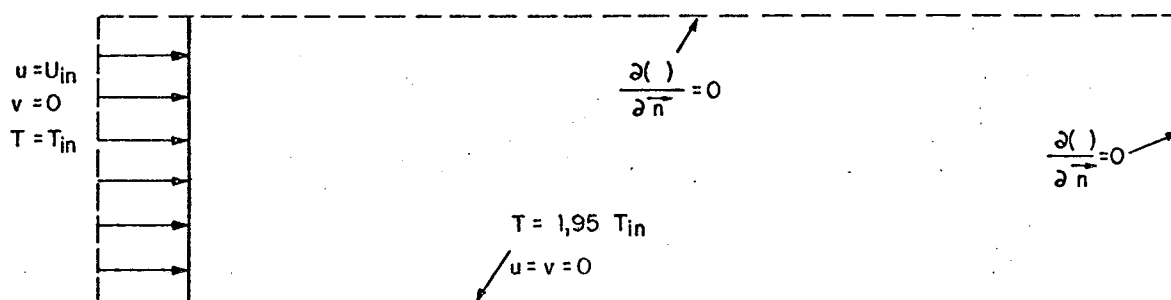


Fig. 5.2.2 - Domínio computacional com as condições de contorno.

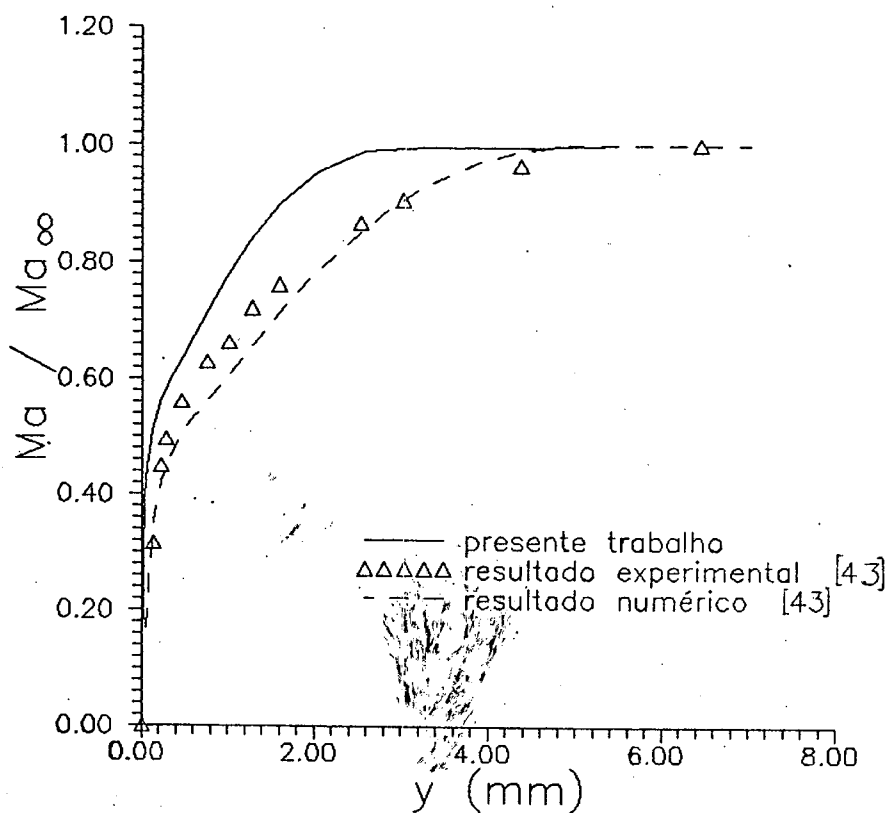


Fig. 5.2.3 - Escoamento supersônico turbulento sobre a placa plana isotérmica. Perfil de velocidade para a posição $x = 182\text{mm}$.

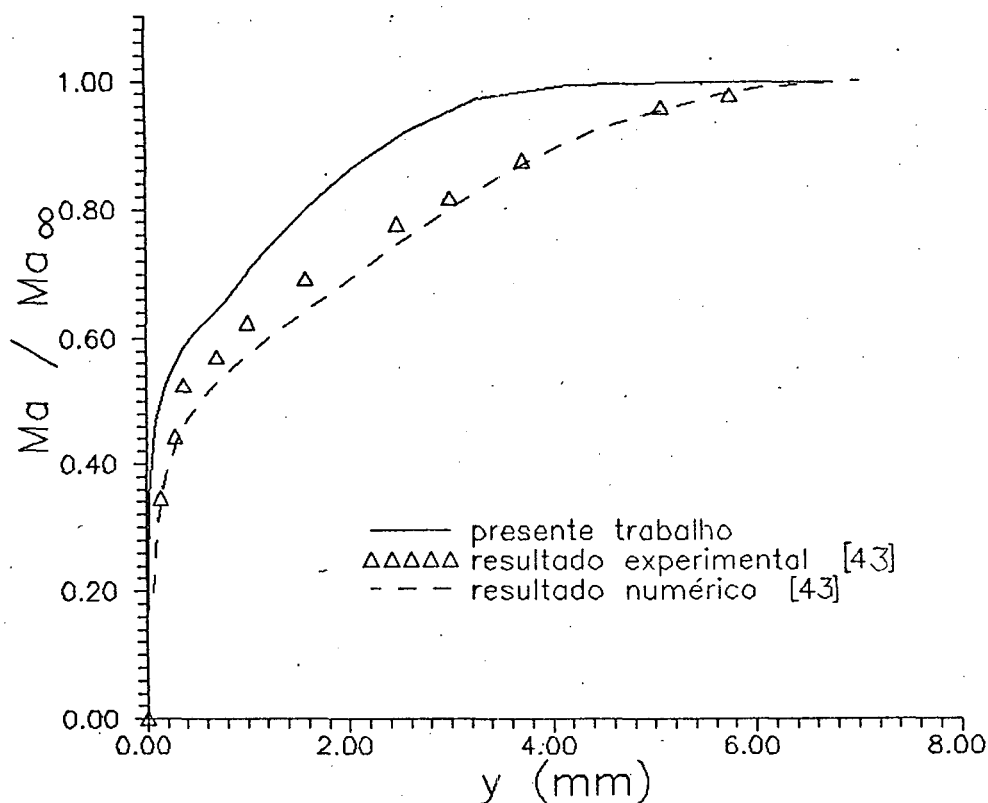


Fig. 5.2.4 - Escoamento supersônico turbulento sobre a placa plana isotérmica. Perfil de velocidade para a posição $x = 281$ mm.

Os resultados obtidos com 1742 iterações são apresentados em forma de perfis de número de Mach (velocidade), conforme pode ser visto nas Figs. 5.2.3 e 5.2.4, e comparados com os valores experimentais obtidos por Michel [43], segundo os dados apresentados em [50], para duas posições ($x = 182$ mm e $x = 281$ mm).

Verifica-se que, segundo o gráfico, não houve boa concordância entre os valores dos resultados experimentais e do presente trabalho, cujas velocidades são superestimadas. Isso nos fornece uma indicação de que os efeitos difusivos na direção y , apresentados pelo modelo de turbulência no presente trabalho são menores do que aqueles referentes aos resultados de [43].

Como dados adicionais, podem ser comparados as espessuras da camada limite, δ , da solução analítica do escoamento incompressível turbulento, conforme apresentado em [33]. Para $X / L = 0,5$, o valor estimado teórico de δ , calculado em função da lei de potência $1/7$ de Prandtl, é de 0,0028

m, enquanto que o valor numérico é de aproximadamente 0,0026 m e para $X/L = 0,9$, o teórico é de 0,0045 m e o numérico é de 0,0042m. O número de volumes de controle dentro da camada limite para a posição $x/L = 0,5$ e $x/L = 0,9$ de 24 e 28, respectivamente. Comparando os resultados numéricos do presente trabalho com os de [43], observa-se que os do último apresentam melhor concordância com os resultados experimentais.

Outro resultado é o perfil de velocidade de fricção para a posição $x/L = 0,5$, mostrado na Fig. 5.2.5. Pode ser observado nessa figura que os valores obtidos são menores que os obtidos com a lei da parede [51], $u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$, conforme Prandtl e Taylor [38]. Isto está de acordo com as observações de White [52], o qual cita que em problemas compressíveis de parede quente, a curva u^+ em função de y^+ situa-se abaixo da curva para escoamentos incompressíveis.

Tentativas usando diversas malhas e modos de interpolação dos coeficientes difusivos não conseguiram melhorar os resultados. A explicação poderá ser encontrada empregando-se outros modelos de turbulência e comparando resultados.

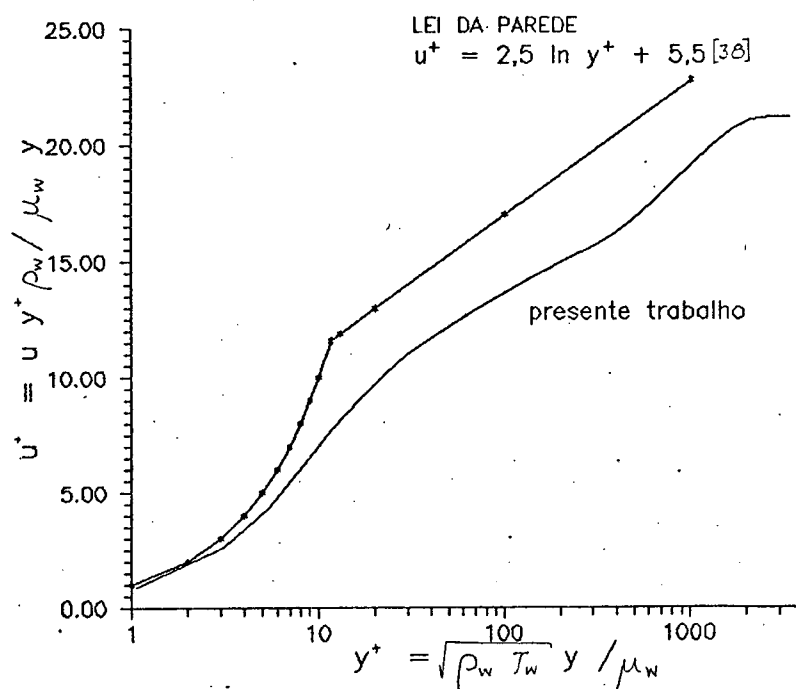


Fig 5.2.5 - Escoamento supersônico turbulento sobre placa plana isotérmica. Perfil de velocidade de fricção ($x/L = 0,5$).

5.3 RAMPA ADIABÁTICA TURBULENTA

Este problema foi escolhido por se tratar de um assunto extensivamente pesquisado experimentalmente e bastante divulgado [35] [36] [37] [38].

Os testes apresentados a seguir foram conduzidos de forma semelhante a [27], com o número de Mach e número de Reynolds baseado na espessura da camada limite, Re_{δ_0} , iguais a $2,9$ e $1,6 \times 10^6$, respectivamente. As rampas escolhidas para comparação foram as de 16 e 20 graus de inclinação com os seguintes dados de entrada :

Número de Mach = $2,9$	$U_{IN} = 960,47 \text{ m/s}$
$T_{IN} = 273 \text{ K}$	$\rho_{IN} = 1,32 \text{ kg/m}^3$
$R_{ar} = 287 \text{ J/kgK}$	$\gamma = 1,4$
$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$	$H = 0,29193 \text{ m}$
$Re_{\delta_0} = 1,6 \times 10^6$	$At = 0,21 \times 10^{-5} \text{ (p/ rampa de } 16^\circ)$
$Pr = 0,72$	$\text{e } 0,74 \times 10^{-7} \text{ s (p/ rampa de } 20^\circ)$
Inclinação = 16° e 20°	$U_{som} = 331,20 \text{ m/s}$

A malha utilizada foi de 100×40 , gerada algebricamente com espaçamento uniforme na direção x , com $\Delta x = 0,005 \text{ m}$ e com espaçamento na direção y em função da equação exponencial do tipo da Eq. 5.1.1, obtendo uma altura para o domínio computacional de $0,2919 \text{ m}$ e com o primeiro espaçamento na direção y junto a superfície de $0,1589 \times 10^{-5} \text{ m}$.

A rampa apresenta um comprimento de $0,317 \text{ m}$ e $0,325 \text{ m}$ para as inclinações de 16 e 20 graus, respectivamente, com um trecho horizontal anterior a rampa de $0,195 \text{ m}$, conforme pode ser visto na Fig. 5.3.1.

As condições de entrada foram obtidas a partir da solução numérica do escoamento turbulento sobre placa plana adiabática, cujos perfis de velocidades, temperatura e densidade escolhidos como condição de contorno na face oeste foram os que apresentavam número de Reynolds baseado na espessura da quantidade de movimento, Re_θ , igual a $8,2 \times 10^4$, que, em

consequência, resulta em coeficiente de atrito igual a $1,05 \times 10^{-3}$ contra o valor $1,02 \times 10^{-3}$ obtido em [27]. As demais condições de contorno podem ser vista na Fig. 5.3.2.

As condições iniciais usadas foram de que todos os perfis, ao longo da direção ξ fossem iguais aos perfis de entrada. É bom lembrar que estas condições apenas alimentam o transiente distorcido.

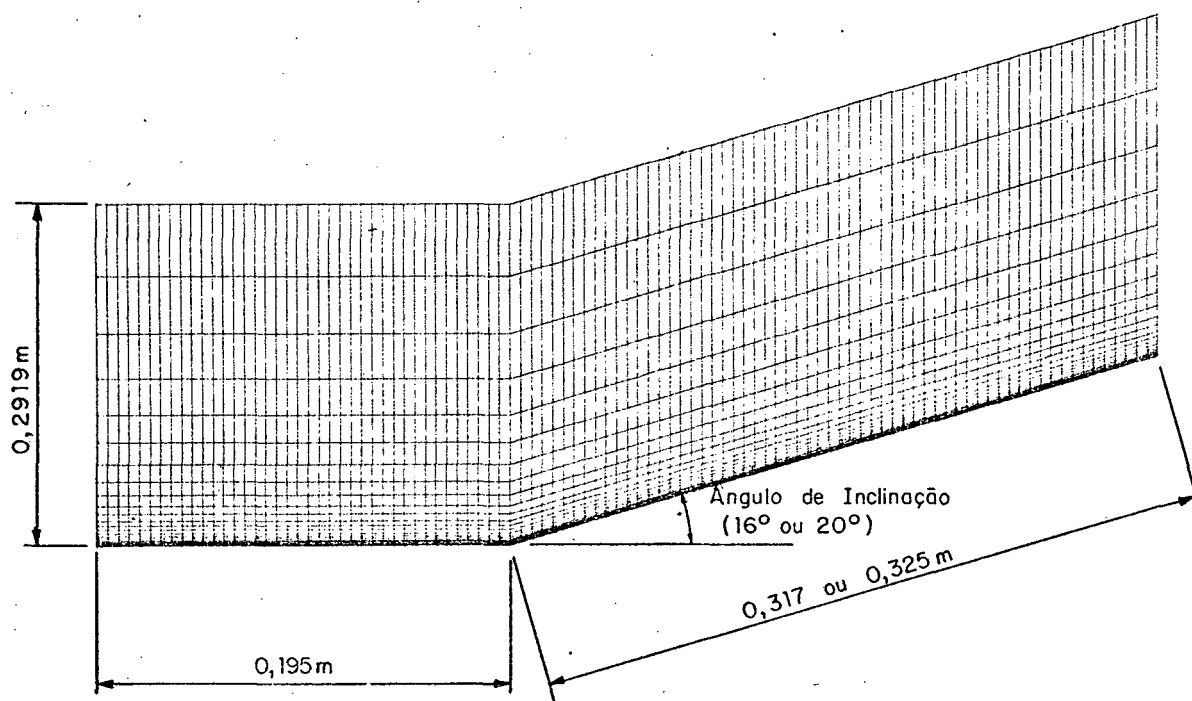


Fig. 5.3.1 - Malha utilizada nos resultados apresentados.

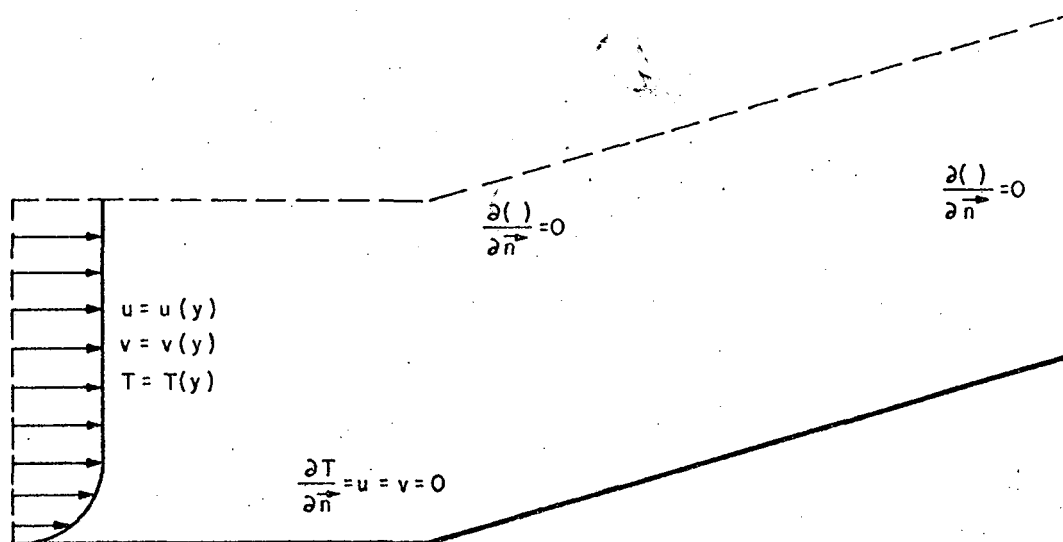


Fig. 5.3.2 - Domínio computacional com as condições de contorno.

Os resultados obtidos numericamente, com 846 e 1316 iterações para as rampas de 16 e 20 graus, respectivamente, foram comparados com os dados experimentais [44] apresentados em [27]. As variáveis comparadas foram as pressões na superfície da rampa e o coeficiente de atrito, calculado conforme Eq.4.1.1. Os valores foram plotados em função da dimensão x adimensionalizada pelo δ_0 , o qual é obtido a partir de Re_{δ_0} , já definido anteriormente.

Conforme podem ser vistos nas Figs. 5.3.3 e 5.3.5, os coeficientes de atritos negativos indicam a extensão da região de recirculação, a qual se apresenta maior nos resultados obtidos numericamente do que nos valores experimentais. Pode ainda ser observado que os resultados experimentais não mostram valores negativos para o coeficiente de atrito, no entanto, de acordo com as tendências das curvas experimentais, mais evidente na da Fig. 5.3.5, esses valores deveriam existir, apesar de não serem mostrados. Os resultados numéricos do presente trabalho e do [27] concordam bem com os experimentais até a região de recirculação, a partir do qual os valores dos coeficientes de atrito obtidos numericamente são subestimados.

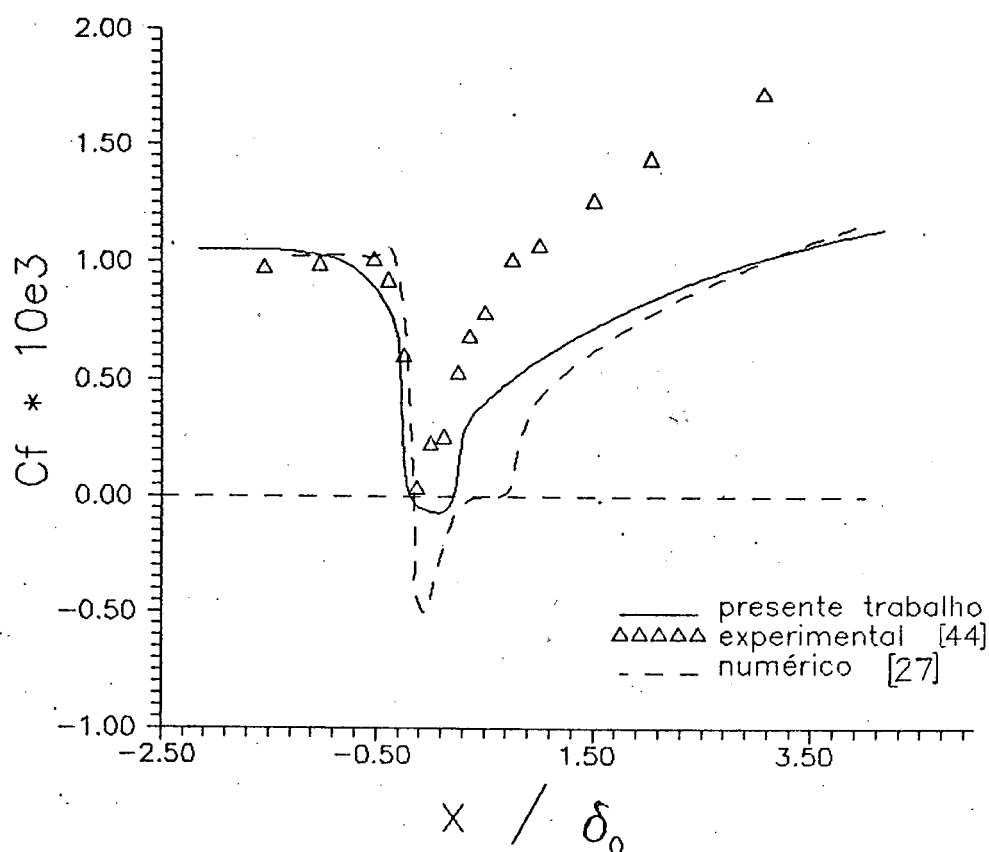


Fig. 5.3.3 - Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 16°. Coeficiente de atrito. $Ma = 2,9$.

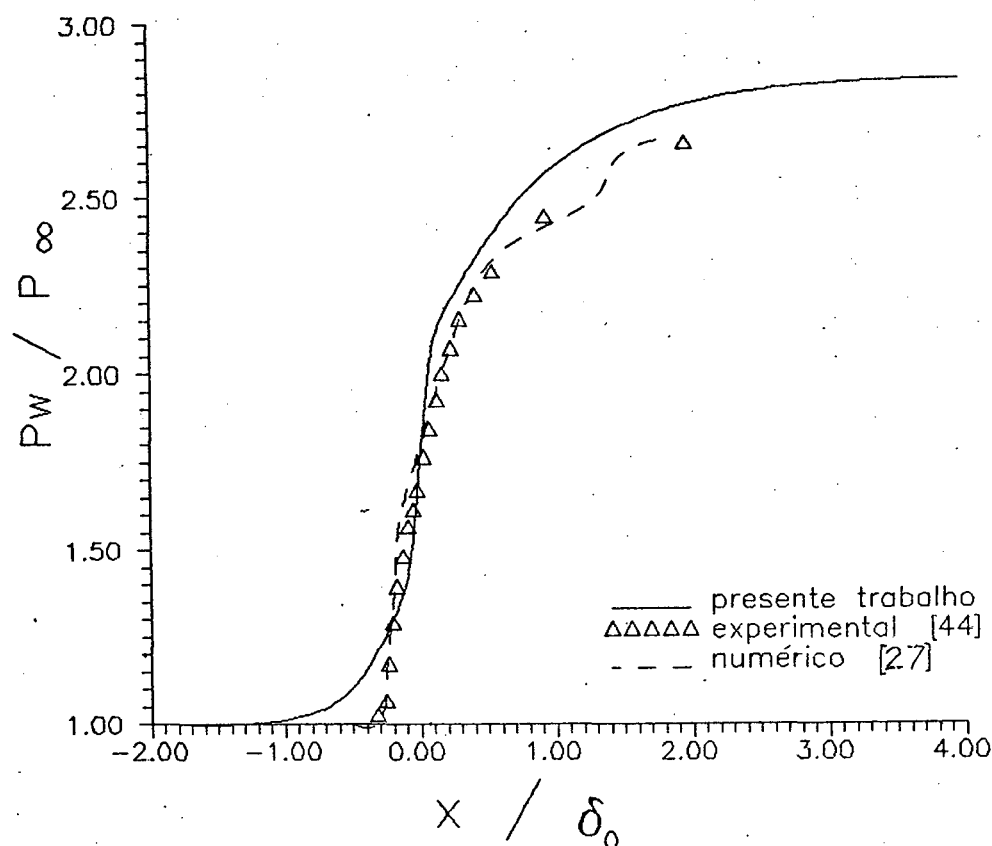


Fig. 5.3.4 - Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 16° . Pressão na parede. $Ma = 2,9$.

Comparando os dois resultados numéricos, podemos ver que a solução numérica deste trabalho quanto ao coeficiente de atrito apresenta em termos gerais um resultado melhor do que aquele de [27]. As pressões nas paredes, conforme podem ser vistas nas Figs. 5.3.4 e 5.3.6, também obtiveram uma boa concordância com os resultados experimentais, porém não tão boa quanto aos resultados de [27].

Inicialmente achava-se que essas diferenças entre os resultados numéricos se devessem principalmente a problemas de malha. No entanto, foram feitos alguns testes usando malhas um pouco mais refinadas na região onde começa a rampa, e verificou-se que a melhora nos resultados são ínfimas, com o desempenho melhor para a pressão. Portanto, pode-se dizer que as diferenças citadas se deva principalmente aos procedimentos numéricos utilizados em ambos os trabalhos numéricos, tendo o procedimento deste trabalho apresentado melhor comportamento para este problema.

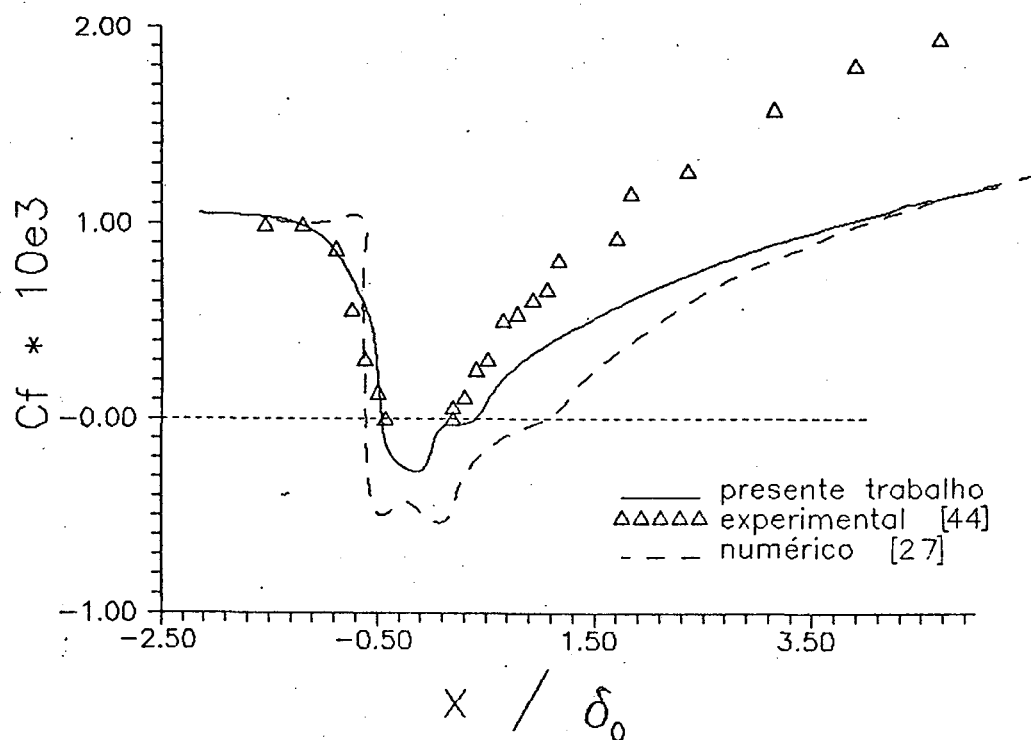


Fig. 5.3.5 - Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 20° . Coeficiente de atrito. $Ma = 2,9$.

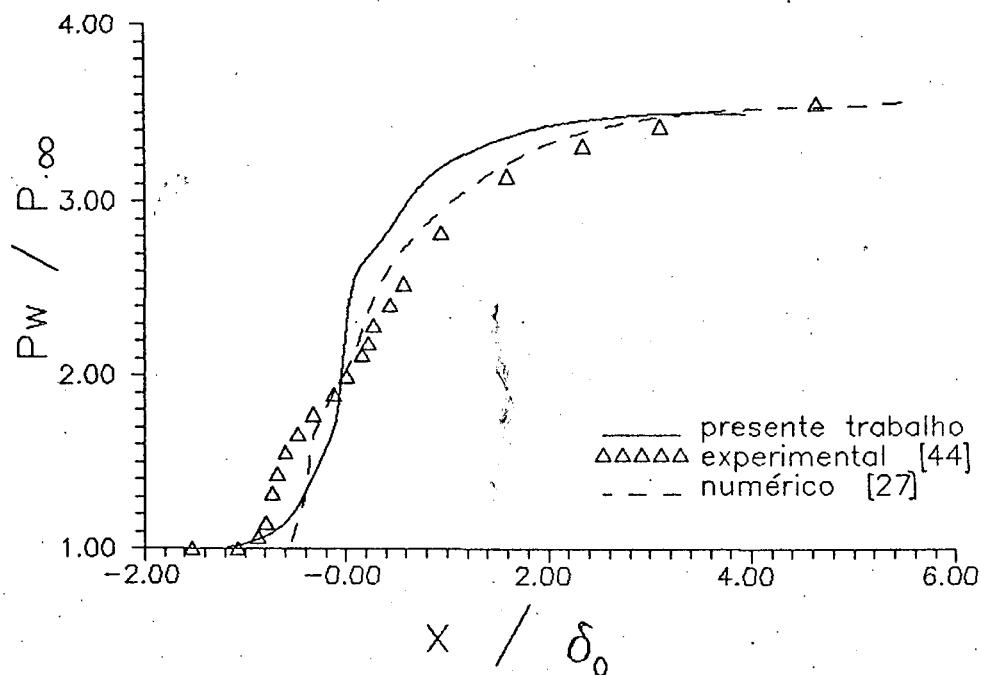


Fig. 5.3.6 - Escoamento supersônico turbulento sobre uma rampa de 20° . Pressão na parede. $Ma = 2,9$.

5.4 VLS

Finalmente, realizou-se a simulação numérica do escoamento sobre a parte frontal do VLS. Este teste tem o objetivo de verificar as condições de escoamento sobre o VLS em regime turbulento e ter informações sobre a influência da dissipação viscosa no aumento de temperatura da superfície. Os dados do problema são mostrados abaixo :

$$\text{Número de Mach} = 3,75 \qquad U_{IN} = 1241,00 \text{ m/s}$$

$$T_{IN} = 273 \text{ K} \qquad \rho_{IN} = 0,32 \text{ kg/m}^3$$

$$R_{ar} = 287 \text{ J/kgK} \qquad \gamma = 1,4$$

$$\mu = 1,76 \times 10^{-5} \text{ kg/ms} \qquad Pr = 0,72$$

$$\Delta t = \text{variável}$$

$$U_{som} = 331,20 \text{ m/s}$$

A malha utilizada de 60×50 foi gerada algebricamente com a superfície do VLS definido ponto a ponto, os contornos oeste e leste definidos por uma linha reta e o contorno norte por uma função hiperbolóide, conforme pode ser vista na Fig. 5.4.1. O espaçamento na direção ξ foi definido manualmente e/ou através de uma função arbitrária qualquer e usou-se uma equação exponencial semelhante a Eq. 5.1.1 para definir o espaçamento na direção η .

As condições iniciais utilizadas foram as da corrente livre. As condições de contorno e as dimensões do VLS podem ser vistas na Fig. 5.4.2.

Devido às condições iniciais usadas e à malha muito refinada no bico do VLS, foi necessário o uso de um avanço de tempo muito pequeno no início das iterações para evitar a divergência na solução. Esse avanço de tempo, Δt , aumenta numa progressão geométrica com a razão de 1,0% e esta progressão é usada até a milésima iteração, a partir da qual ela fica constante. Dessa forma, usando o Δt inicial de $0,48 \times 10^{-8}$ s, chegou-se ao valor de 0,0001013 s para o último Δt . A progressão foi limitado à milésima iteração, pois a partir desta, o valor de Δt fica grande demais e causa divergência.

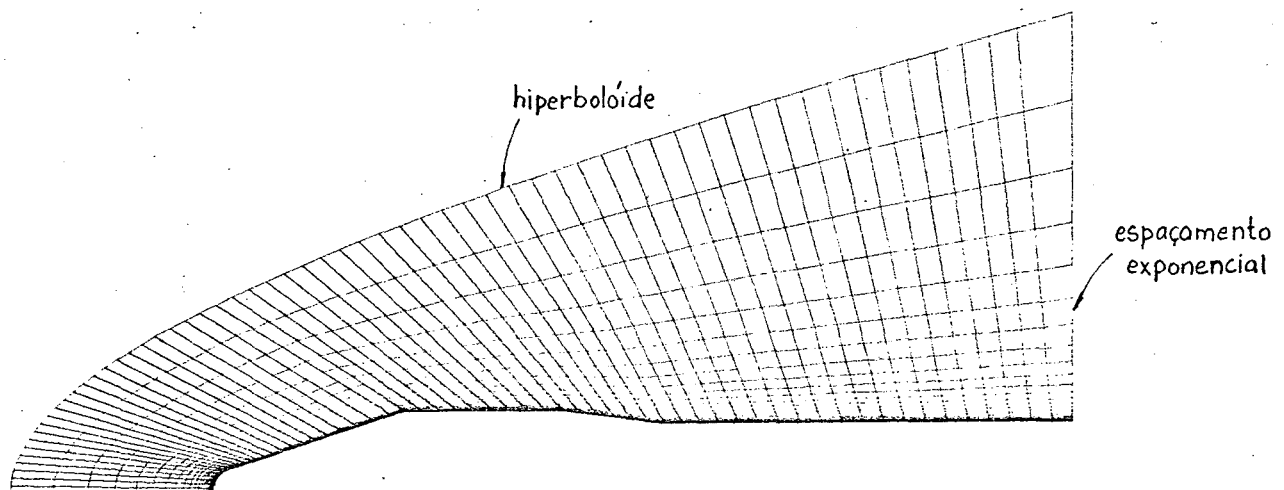


Fig. 5.4.1 - Malha utilizada nos resultados apresentados.

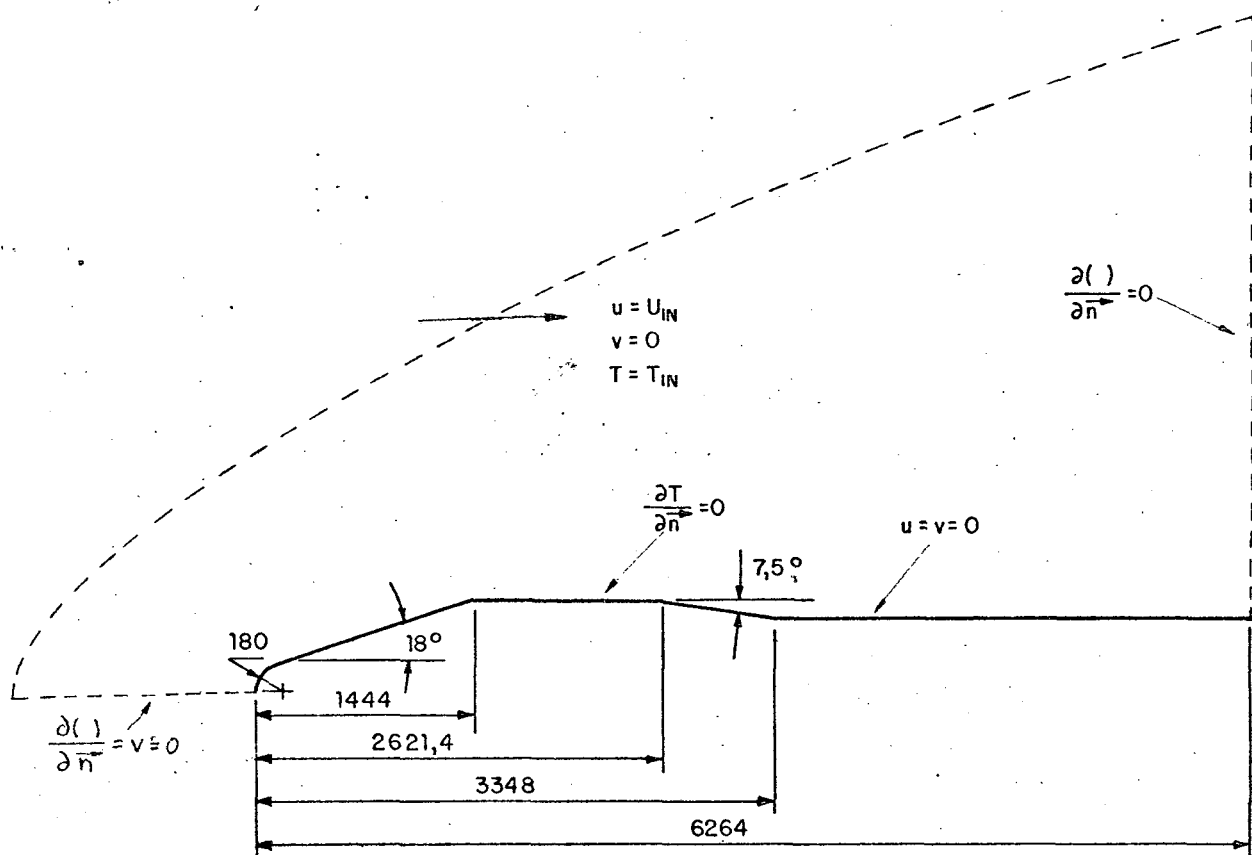


Fig. 5.4.2 - Domínio computacional com as condições de contorno.

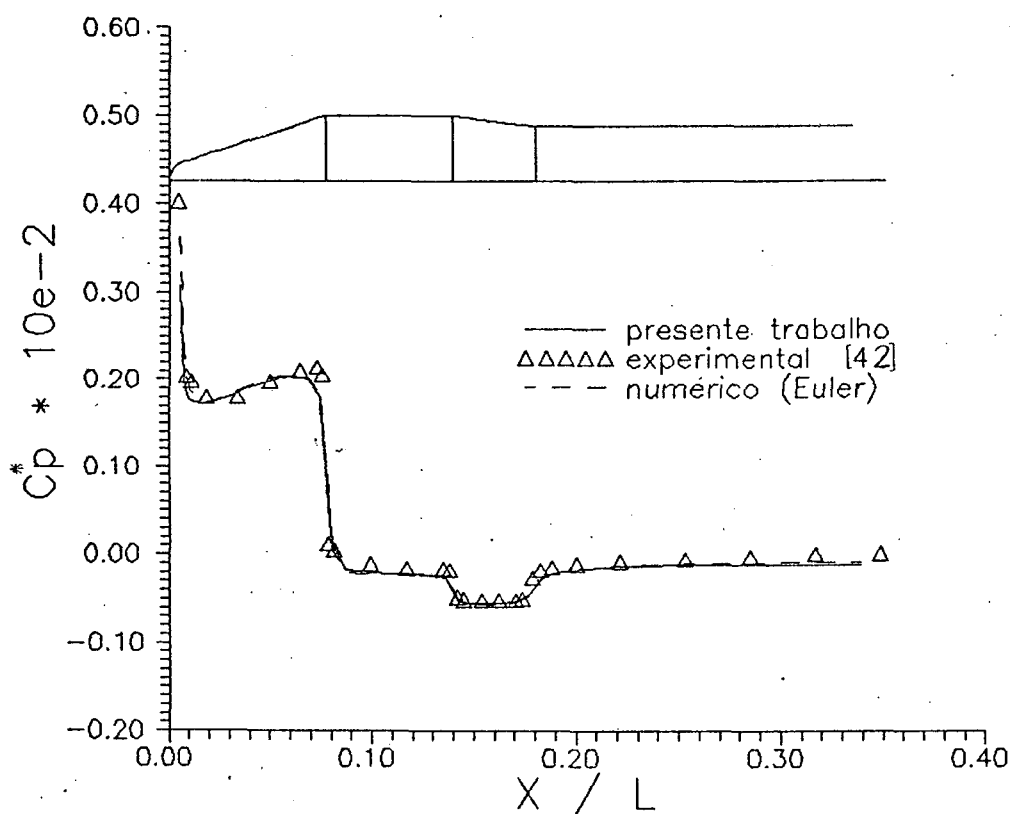


Fig. 5.4.3 - Escoamento supersônico turbulento sobre VLS.
Coeficiente de pressão. $Ma = 3,75$.

A solução apresentada foi obtida com 1089 iterações. E como forma de verificar a coerência dos resultados, foi feita a comparação entre os coeficientes de pressão numérico e experimental [42]. O resultado obtido concorda bem com os dados experimentais, conforme Fig. 5.4.3, mas não se verifica nenhuma diferença sensível em relação ao resultado obtido usando equações de Euler, conforme era esperado, uma vez que as equações de Euler se constituem em um bom modelo para a simulação do problema aerodinâmico.

Analisando a Fig. 5.4.4, pode-se ver que a distribuição de temperatura na superfície, a qual está bastante coerente fisicamente, apresenta nas regiões de compressão as maiores temperaturas e nas regiões de expansão as menores. Além disso verifica-se também que a temperatura não só aumenta devido aos efeitos termodinâmicos, pois nas regiões onde as

pressões permanecem praticamente uniformes, ocorre a elevação da temperatura. E isso é devido quase que exclusivamente aos efeitos da dissipação viscosa.

Portanto, comparando as soluções usando as equações de Euler, as equações de Navier-Stokes com e sem dissipação viscosa e as equações de Navier-Stokes com turbulência e dissipação viscosa, conforme a Fig. 5.4.5, pode-se ter uma idéia de como o efeito da dissipação viscosa é atuante. Ainda nesta figura, apesar de não ser muito distinto, verifica-se que as temperaturas na extremidade frontal do VLS para os quatro casos apresentam praticamente os mesmos valores. Isso pode ser explicado pelo fato de que nesse ponto não há efeito da dissipação viscosa, sendo o efeito termodinâmico o responsável pelo aumento de temperatura.

Comparando os resultados com e sem o modelo de turbulência com dissipação, vê-se que as temperaturas da superfície são maiores no caso turbulento, pois, conforme é conhecido, os gradientes de velocidades na superfícies são maiores no caso turbulento e portanto, como o efeito da dissipação viscosa é função desses gradientes, ocorre as maiores temperaturas para a situação turbulenta.

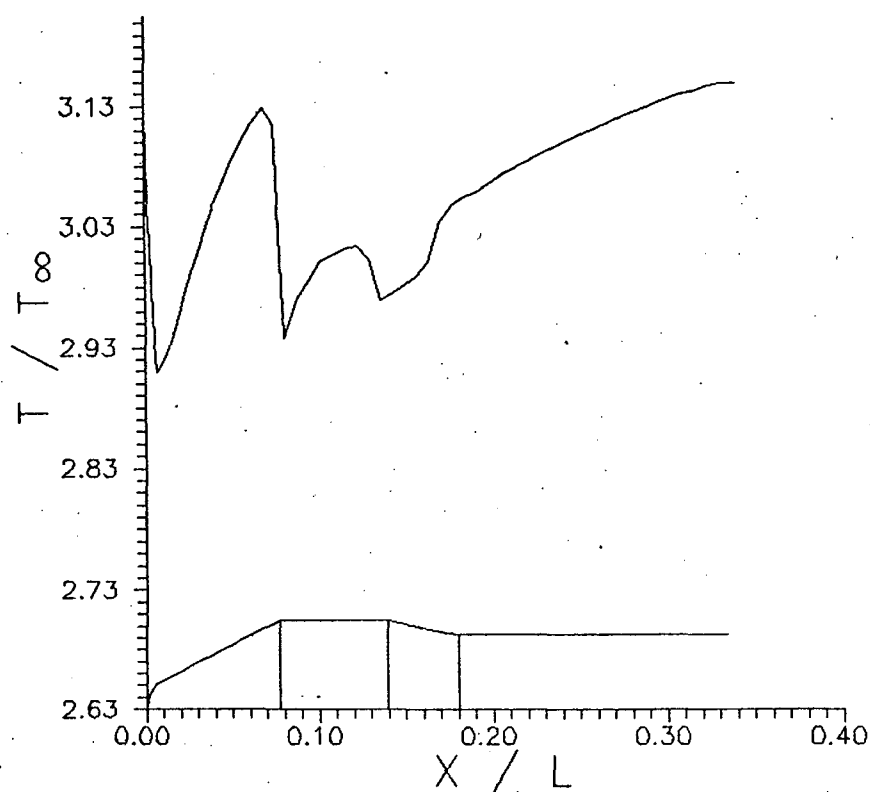


Fig. 5.4.4 - Escoamento supersônico turbulento sobre o VLS.

Distribuição de temperatura na superfície. $Ma = 3,75$

Ainda na Fig. 5.4.5, observa-se que, nos casos com e sem o modelo de turbulência sem dissipação, as duas curvas de temperatura são praticamente as mesmas e isso está de acordo com o esperado, pois, uma vez eliminados os termos dissipativos, os termos fonte de energia apresentam apenas os termos dos efeitos termodinâmicos, que são idênticos para os dois casos citados.

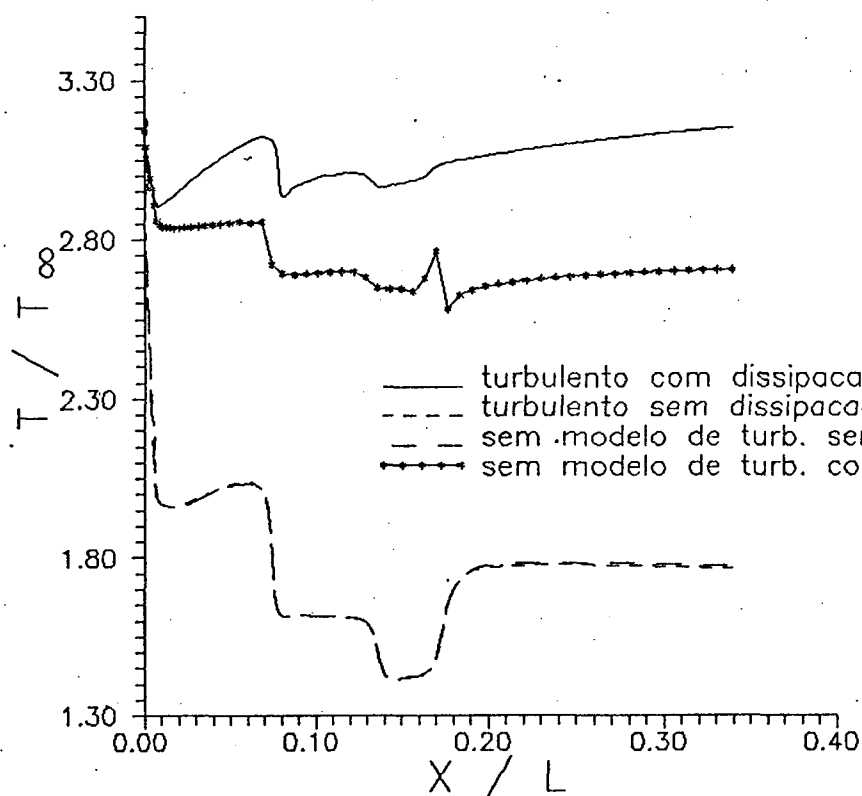


Fig. 5.4.5 - Escoamento supersônico sobre VLS.

Distribuição da temperatura na superfície para diversas soluções. $Ma = 3,75$.

Da mesma forma em que não temos os dados experimentais disponíveis para a distribuição de temperatura na superfície, também não temos para o coeficiente de atrito. Mas conforme pode ser visto na Fig. 5.4.6 com o auxílio da Fig. 5.4.3, podemos observar que os valores obtidos estão consistentes fisicamente, com os coeficientes maiores nas regiões de gradiente de pressão positiva e menores nas regiões de gradiente

negativos. E comparando os dois casos numéricos, com e sem o modelo de turbulência com dissipação viscosa, conforme Fig. 5.4.7, verifica-se que no caso sem o uso do modelo de turbulência, ocorre valores negativos para o coeficiente de atrito, indicando a ocorrência de recirculação, enquanto que no caso turbulento isso não ocorre. O fato da recirculação aparecer apenas nos resultados onde o modelo de turbulência não é considerado merece ainda uma investigação mais aprofundada, não realizada neste trabalho.

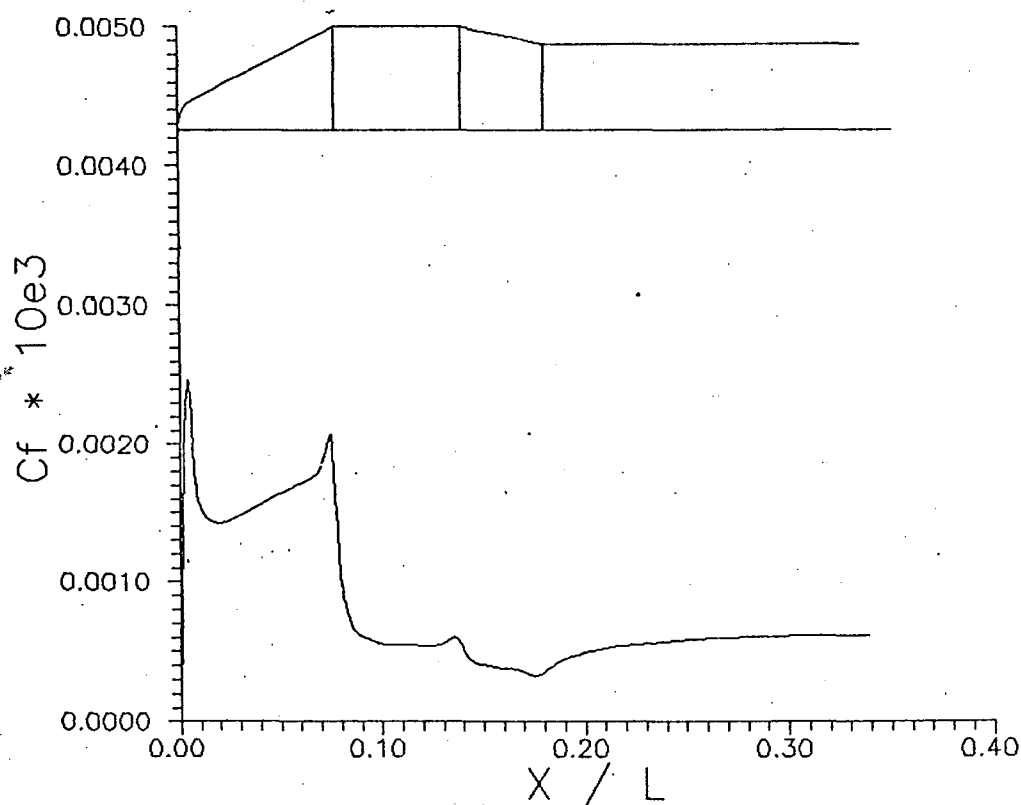


Figura 5.4.6 - Escoamento supersônico turbulento sobre VLS.
Coeficiente de atrito. $Ma = 3,75$.

Apesar de não termos certeza quanto a precisão, podemos usar esses valores qualitativamente e quantitativamente para otimizar perfis de aeronaves de modo a obter a menor perda de energia. Além disso, esses resultados nos fornecem uma idéia boa de onde estão localizados os maiores

esforços físicos e térmicos.

Dessa forma, fazendo uma análise dos gráficos do ponto de vista prático, a partir da Fig. 5.4.4, pode-se concluir que na região cilíndrica situada entre 0,75 e 1,40 para o valor de X/L , a temperatura superficial apresenta uma das menores médias, portanto um bom local para armazenar equipamentos mais sensíveis às altas temperaturas. Das Figs. 5.4.3 e 5.4.6, pode-se deduzir que as regiões que sofrem os maiores esforços físicos estão localizadas nas regiões próximas ao bico do foquete, e na junção entre as partes cônica e cilíndrica ($X/L \cong 0,75$). Além disso, a partir da Fig. 5.4.6 pode-se dizer que, como não ocorrem valores negativos para o coeficiente de atrito, não existem recirculações em termos de valores médios.

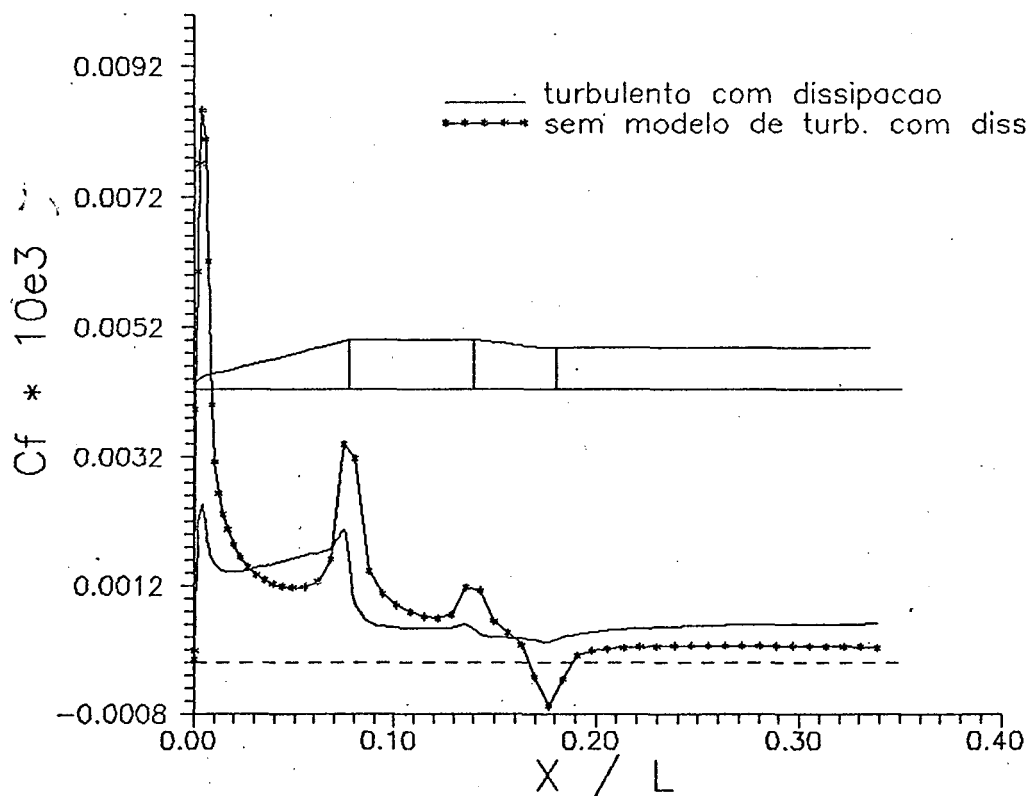


Fig. 5.4.7 - Escoamento supersônico sobre VLS.

Coeficiente de atrito para os casos com e sem o modelo de turbulência. $Ma = 3,75$.

6 CONCLUSÕES

Com o objetivo de resolver escoamentos supersônicos turbulentos com dissipação viscosa, o presente trabalho fez uso da metodologia para escoamentos a qualquer regime de velocidade, com variáveis co-localizadas, empregando as equações de Navier-Stokes em duas dimensões com os termos dissipativos e com a viscosidade molecular variável. O modelo de turbulência empregado é o de Baldwin e Lomax.

Para se chegar ao código computacional com essas implementações foram realizadas algumas etapas intermediárias ;

- Testou-se o código computacional MACH2D, o qual usa variáveis co-localizadas e equações de Navier-Stokes sem dissipação viscosa, na solução de escoamento em regime laminar sobre uma placa plana. O resultado alcançado foi comparado com a solução obtida através da similaridade.

- Acrescentaram-se ao código anterior os termos da dissipação viscosa, considerando a viscosidade variável em função da temperatura, conforme a lei de Sutherland. Esta implementação foi testada nas soluções de escoamentos supersônicos em regime laminar com dissipação viscosa sobre placa plana isotérmica e os seus resultados comparados com as soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes com dissipação viscosa e com as simplificações de camada limite.

- Finalmente adicionou-se o modelo de turbulência algébrico de Baldwin e Lomax. Com essa versão final do código computacional, foram resolvidos os problemas de escoamentos turbulentos sobre placas planas adiabáticas e isotérmicas e sobre rampas adiabáticas, e os resultados foram comparados com os valores experimentais para a validação do modelo

numérico. Como exemplo de aplicação, foi resolvido o problema do escoamento supersônico turbulento com dissipação viscosa sobre a parte frontal do VLS.

Ao se analisar os resultados de cada uma das etapas, constatou-se que :

- Na solução do escoamento em regime laminar sobre placa plana adiabática, quando foram comparados os perfis de velocidade e o coeficiente de atrito numérico com os valores analíticos, observaram-se boas concordâncias. Além disto, os campos de pressão, temperatura e densidade permaneceram uniformes, conforme era esperado.

- Na solução de escoamentos supersônicos em regime laminar com dissipação viscosa, quando foram comparados os perfis de velocidade e de temperatura em duas posições da placa, houve boa concordância entre os resultados numéricos e os analíticos, no entanto, os perfis tanto da velocidade quanto da temperatura não se apresentaram com a forma única, esperada em vista da solução analítica.

- Com relação ao problema do escoamento supersônico turbulento sobre placa plana adiabática, pode-se dizer que o resultado obtido é bom, quando comparado com os valores experimentais, no entanto, questiona-se o motivo pelo qual o coeficiente de atrito obtido é superestimado tanto em relação ao valor experimental quanto ao valor numérico obtido em [20].

- Para o problema do escoamento supersônico turbulento sobre placa plana isotérmica, quando foram comparados os perfis de número de Mach (Ma) em duas posições com os dados experimentais, verificou-se que não houve boa concordância, com os valores de Ma obtidos superestimados em relação aos experimentais. Não se encontrou uma explicação adequada para esse fato, mas um ponto interessante foi evidenciado nesse caso. Tanto no caso anterior quanto nesse caso, as velocidades são superestimadas, com a diminuição da espessura da camada limite. Portanto, esse fato fornece uma forte indicação de que os coeficientes difusivos deveriam ser maiores do que são no presente trabalho. Isto leva a atribuir ao modelo de turbulência a responsabilidade pelas diferenças.

- Na solução do escoamento supersônico turbulento sobre rampa adiabática os resultados numéricos obtidos para a pressão na parede e para o coeficiente de atrito, quando comparados com os dados experimentais, apresentaram uma razoável concordância na pressão, mas não tão boa para o coeficiente de atrito. No entanto, comparados com os resultados obtidos

por [27], que também usou o modelo de Baldwin e Lomax, observou-se que os resultados para o coeficiente de atrito do presente trabalho estão melhores. Portanto, estas etapas de validação do modelo numérico foram consideradas satisfatórias.

- Na solução do escoamento supersônico turbulento sobre o VLS, como exemplo de aplicação, os valores obtidos para a pressão obtiveram boa concordância com os valores experimentais. Adicionalmente, apresentaram-se resultados sobre o coeficiente de atrito e a temperatura na superfície do VLS, os quais mostraram ser fisicamente coerentes. Não se tem, infelizmente, dados de outros trabalhos para comparação.

Em vista dos resultados, juntamente com os fatos observados durante a solução dos problemas, pode-se dizer que :

- A formulação para escoamentos a qualquer regime de velocidade apresentou bons resultados nas soluções de problemas tanto em alta quanto em baixa velocidade.

- O uso de variáveis co-localizadas simplifica bastante os códigos computacionais e reduz consideravelmente a memória alocada para as variáveis. Com isso, o código computacional ficou mais compacto sem perder a eficácia.

- O modelo de turbulência utilizado mostrou ser bastante prático pela sua simplicidade e pelas vantagens de não necessitar entrada de dados empíricos variáveis, além de poder ser estendido a problemas tri-dimensionais.

O código computacional implementado, baseado na formulação compressível/incompressível, usando variáveis co-localizadas e o modelo de turbulência de Baldwin e Lomax, mostrou-se adequado para a simulação de escoamentos turbulentos sobre superfícies, sendo que nos casos turbulentos resolvidos, constatou-se que o fato de se usar viscosidade laminar variável reflete pouco nos resultados turbulentos, uma vez que o valor da viscosidade turbulenta é muito superior nas regiões onde ocorrem as maiores variações da viscosidade laminar.

Além disso, foi verificado que a boa escolha da malha é um fator primordial para a aplicação do modelo de turbulência e que uma condição importante referente a malha é que ela apresente um y^+ da ordem de 2,0 em todo o domínio.

Como observação final, acredita-se que as implementações aqui

realizadas serão de utilidade na sequência dos trabalhos do Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) do EMC, por permitir avançar mais um passo dentro do objetivo global do Grupo que é o desenvolvimento de modelos numéricos que possam resolver problemas reais de aerodinâmica subsônica e supersônica.

REFERÊNCIAS

- [1] Kutler, P., " A Perspective of Theoretical and Applied Computacional Fluid Dynamics", AIAA Journal, Vol. 23, March 1985, pp. 328-341.
- [2] Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flows", McGraw Hill, New York, 1980.
- [3] Harlow, F.H. and Amsden, A.A., "A Numerical Fluid Dynamics Calculation for All Flow Speeds". J. Comp. Phys., Vol. 8, pp. 197-213, 1971.
- [4] Van Doormaal, J.P., "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1985.
- [5] Karki, K.C. and Patankar, S.V., "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flow at All Speeds in Arbitrary Configurations", AIAA Journal, Vol. 27, No. 9, September 1989, pp. 1167-1174.
- [6] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., "Avaliação no Limite Incompressível de Uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento", IX COBEM, Florianópolis, SC, dezembro 1987.
- [7] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., "Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas", ENCIT 88 - Águas de Lindóia, SP, dezembro 1988.
- [8] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C. , "Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade", Parte I , Relatório Técnico Preparado para o IAE do CTA, Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, junho 1987.

- [9] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., "Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade", Parte II, Relatório Técnico Preparado para o IAE do CTA, Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, dezembro 1987.
- [10] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., "Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade", Parte III, Relatório Técnico Preparado para o IAE do CTA, Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, setembro 1988.
- [11] Rhie, C.M., "A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation", Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1981.
- [12] Hsu, C., "A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry", Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1981.
- [13] Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Co-located Grids", Computer and Fluids, Vol. 16, No. 4, pp. 389-403, 1988.
- [14] Marchi, C.H., Bortoli, A.L. e Maliska, C.R., "The Use of Co-located Variables in the Solution of Supersonic Flows", X COBEM, December 1989.
- [15] Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Silva, A.F.C., "A Boundary-Fitted Numerical Method for the Solution of Three Dimensional All Speed Flows Using Co-located Variables, III ENCIT, Itapema, SC, December 1990.
- [16] Bortoli, A.L., " O Uso de Variáveis Co-localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, setembro 1990.
- [17] Maliska, C.R., "A Solution Method for Three Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.
- [18] Schneider, G.E. and Zedan, M. , "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- [19] Raithby, G.D. and Torrance, K.E., "Upstream-weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computer and Fluids, Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- [20] Baldwin, B. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", AIAA Paper 78-257, 1978.

- [21] Goldberg, U.C. and Chakravarthy S.R., "Prediction of Separated Flows with a new Backflow Turbulence Model", AIAA Journal, Vol. 20, No. 4, April 1988, pp. 405-408.
- [22] Bardina, J., "Toward a General Turbulence Model", AIAA paper 89-1862, 1989.
- [23] Azevedo, J.L.F., "Transonic Aeroelastic Analysis of Launch Vehicle Configurations", Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, February 1988.
- [24] Ng, W.F., Ajmani, K. and Taylor III, A.C., "Turbulence Modeling in Hypersonic Inlet", AIAA Journal, Vol. 27, No. 10, October 1989, pp. 1354-1360.
- [25] Stock, H.W. and Haase, W., "Determination of Length Scales in Algebraic Turbulence Models for Navier-Stokes Methods", AIAA Journal, Vol. 27, No. 1, January 1989, pp. 5-14.
- [26] Johnson, D.A. and King, L.S., "A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers", AIAA Journal, Vol. 23, November 1985, pp. 1684-1692.
- [27] Visbal M. and Knight D., "The Baldwin-Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions", AIAA Journal, Vol. 22, July 1984, pp. 921-928.
- [28] Reynolds, O., "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, Vol. 186, 1895 pp. 123-164.
- [29] Anderson, D. A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, 1984.
- [30] Harlow, F.H., and Welch, J.E., "Numerical of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Physics of Fluids, Vol. 8, 1965, pp. 2182-2189.
- [31] Maliska, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", SINMEC/EMC/UFSC, maio 1988.
- [32] SINMEC, "Código Computacional MACH2D", SINMEC/EMC/UFSC, 1989.
- [33] Blasius, H., "Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung", Z. Math. Phys., Vol. 56, 1908, P. 1; also NACA TM 1256.
- [34] Settles, G.S., Bogdonoff, S.F., and Vas, I.E., "Incipient Separation of a Supersonic Turbulent Boundary Layer at High Reynolds Numbers", AIAA Journal, Vol. 14, No. 1, January 1976, pp. 50-56.
- [35] Settles, G.S., Vas, I.E., and Bogdonoff, S.F., "Details of a Shock-Separated Turbulent Boundary Layer at a Compression Corner",

- AIAA Journal, Vol. 14, No. 12, December 1976, pp. 1709-1715.
- [36] Settles, G.S., Fitzpatrick, T.J., and Bogdonoff, S.M., "Detailed Study of Attached and Separated Compression Corner Flowfields in High Reynolds Number Supersonic Flow", AIAA Journal, Vol. 17, No. 6, June 1979, pp. 579-585.
 - [37] Ardonceau, P.L., "The Structure of Turbulence in a Supersonic Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction", AIAA Journal, Vol. 22, No. 9, September 1984, pp. 1254-1262.
 - [38] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, 1955.
 - [39] Marchi, C.H. and Maliska, C.R., "The Use of Co-Located Variables in the Solution of Supersonic Flows", submitted to Numerical Heat Transfer, 1991.
 - [40] Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review", Institut für Hydromechanik and Sonderforschungsbereich 80, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Federal Republic of Germany, June 1980.
 - [41] Nallasamy, M., "Turbulence Models and Their Applications to the Prediction of Internal Flows : A Review.", Computer & Fluids, Vol. 15, No. 2, pp. 151-194, 1987.
 - [42] ONERA, "Essai du Lanceur Bresilien au 1/15 Soufflerie S2MA; Configuration VC - C (5 dards), Mach 1.500, 2.502, 3.747", France, decembre 1988.
 - [43] Michel, R. : Etude de la transition sur les profiles d'aile; etablissement d'un critere de determination de point de transition et calcul de la trainee de profile incompressible. ONERA Rept 1/578A, 1951.
 - [44] Settles, G., Gilbert, R., and Bogdonoff, A., "Data Compilation for Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction Experiments on Two-Dimensional Compression Corner", Dept. of Aerospace and Mechanical Engineering, Princeton University, Princeton, N.J., Rept. MAE-1489, 1980.
 - [45] Hopkins, E.J. and Inouye, M.I., "An Evaluation of Theories for Predicting Turbulent Skin Friction and Heat Transfer on Flat Plates at Supersonic and Hypersonic Mach Numbers." AIAA Journal, Vol. 9, No. 6, June 1971, pp. 993-1003.
 - [46] Bejan, A., "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1984.
 - [47] Hinze, J. O., Turbulence, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1975.
 - [48] Cebeci, T. and Bradshaw, P., "Physical and Computational Aspects of

Convective Heat Transfer", Springer-Verlag New York Inc., 1984.

- [49] Cebeci, T. and Smith, A.M.O., "Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, New York, 1974.
- [50] Bobenrieth M., R.F. e Ortega, M. A., "The Solution of the Compressible Turbulent Boundary Layer by the Keller Method and its Application to the Case of the Shock Tube.", submetido à Revista Brasileira de Ciências Mecânicas.
- [51] Coles, D., "The law of the wall in turbulent shear flow", 50 Jahre Grenzschichtforschung, H. Görtler and W. Tollmien, eds., Vieweg, Braunschweig, 1955, pp. 153-163.
- [52] White, F. M., "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, Inc., 1974.